Université de Rennes 1 **Licence de Mathématiques**
Année 2005-2006

Intégration et probabilités
Examen de deuxième session

Les documents et la calculatrice sont interdits. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.
Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice 2.
Soit $a \geq 0$ et $b > 0$ deux nombres réels. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}.$$

1. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles cette fonction est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que, pour tous a et b dans $]0,+\infty[$,
$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$
On pourra écrire la fonction $x \mapsto 1/(1-e^{-bx})$ sous la forme d'une série.

Exercice 3.
Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+)$ soit fini. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$L_\mu(\lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{\lambda x}\,\mu(dx) \in [0,+\infty].$$

On note D_μ l'ensemble sur lequel L_μ est fini.

1. Déterminer la fonction L_μ en précisant l'ensemble D_μ associé dans les cas suivants :
   – μ_1 est la mesure de densité $\alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue pour $\alpha > 0$,
   – μ_2 est la mesure $(1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_1$,
   – μ_3 est la mesure $\sum_{k=0}^{+\infty}(1/k!)\delta_k$,
2. Montrer que D_μ une demi-droite de $\mathbb{R}$ qui contient toujours $]-\infty,0]$. . Peut-elle être ouverte ? Peut-elle être fermée ? Peut-elle être restreinte à $]-\infty,0]$?
3. Montrer que, pour tout λ_0 appartenant à l'intérieur de D_μ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{\lambda_0 x}$ est μ-intégrable.
4. En déduire que L_μ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intérieur de D_μ.
5. Montrer que L_μ est convexe sur D_μ. On pourra pour cela utiliser la question précédente ou la convexité de la fonction exponentielle.
6. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que, pour tous λ_0 et λ_1 appartenant à D_μ et tout $s \in]0,1[$,
$$L(s\lambda_0 + (1-s)\lambda_1) \leq L(\lambda_0)^s L(\lambda_1)^{1-s}.$$
7. Calculer la dérivée seconde de $\ln L_\mu$ en un point de l'intérieur de D_μ. Quel est son signe ?
8. Déduire de l'une des deux questions précédentes la convexité de la fonction $\ln L_\mu$.