

Intégration et probabilités - DM 2 - Corrigé

Exercice 1.

1) Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$L_{X_1}(u) = \mathbb{E}(e^{uX_1}) = 1 - p + pe^u.$$

2) Pour tout $s > -1$ (mais en fait pour tout $s \in \mathbb{R}$)

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{\lambda(s-1)}.$$

Remarquons que, pour N une v.a. entière générique, si $|s| < 1$, $G(s)$ sera nécessairement fini et si $s \geq 1$, $G(s)$ a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

3) Le théorème de convergence monotone (ou son corollaire pour le calcul de l'intégrale d'une série de fonctions positives) assure que

$$\begin{aligned} L_T(u) &= \mathbb{E}(e^{uT}) = \mathbb{E}\left(e^{uT} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{uT} \mathbf{1}_{\{N=k\}}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{N=0\}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{u(X_1+\dots+X_k)} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right), \end{aligned}$$

et $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{N=0\}}) = e^{-\lambda}$.

4) Pour $k \geq 1$, par indépendance de X_1, \dots, X_k, N , on a

$$\mathbb{E}\left(e^{u(X_1+\dots+X_k)} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right) = \mathbb{E}(e^{uX_1}) \dots \mathbb{E}(e^{uX_k}) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{N=k\}}) = L_{X_1}(u)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On a donc

$$L_T(u) = G(L_{X_1}(u)) = e^{\lambda(L_{X_1}(u)-1)} = e^{p\lambda(e^u-1)}.$$

Ainsi la transformée de Laplace de T , définie sur \mathbb{R} , est celle d'une v.a. de loi de Poisson de paramètre $p\lambda$: T suit la loi $\mathcal{P}(p\lambda)$.

Exercice 2.

1) On a

$$\mathbb{P}(\{X_1 = X_2\}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_1=X_2\}}) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \mathbf{1}_{x=y} e^{-x} e^{-y} dx dy = 0.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\{\exists i, j \text{ distincts, } X_i = X_j\}) \leq \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(\{X_i = X_j\}) = 0.$$

2) Puisque les v.a. sont positives, $\mathbb{P}(Z > x) = 1$ pour $x < 0$. Soit $x \geq 0$.

$$\mathbb{P}(Z > x) = \mathbb{P}(\forall i = 1, \dots, n, X_i > x) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x) \stackrel{\text{même loi}}{=} \mathbb{P}(X_1 > x)^n \stackrel{\text{loi expo}}{=} e^{-nt}.$$

La fonction de répartition de Z est donc égale à $t \mapsto (1 - e^{-nt}) \mathbf{1}_{\{t>0\}}$ donc Z suit la loi exponentielle de paramètre n .

3) Si $N = k$, c'est que $Z = X_k$ et que pour $i \neq k$, $X_i > X_k$ donc

$$\{N = k, Z > x\} = \{X_k > x, \forall i \neq k, X_i > X_k\}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(\{N = k, Z > x\}) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{1}_{\{x_k > x\}} \prod_{i \neq k} \mathbf{1}_{\{x_i > x_k\}} e^{-x_1} \dots e^{-x_n} dx_1 \dots, dx_n.$$

Pour $i \neq k$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{x_i > x_k\}} e^{-x_i} dx_i = [-e^{-u}]_{x_k}^{+\infty} = e^{-x_k}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(\{N = k, Z > x\}) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{x_k > x\}} e^{-nx_k} dx_k = \frac{e^{-nx}}{n}.$$

4) Si l'on choisit $x = 0$ dans la formule ci-dessus, on voit que pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(\{N = k\})\mathbb{P}(\{N = k, Z > 0\}) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, N suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. De plus on remarque que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\mathbb{P}(\{N = k, Z > x\}) = \mathbb{P}(\{N = k\})\mathbb{P}(\{Z > x\}).$$

Puisque les rectangles $\{k\} \times]x, \infty[$ engendrent la tribu produit sur $\{1, \dots, n\} \times \mathbb{R}$, on en déduit que N et Z sont indépendantes.

Exercice 3. Algorithme de Box-Muller

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On se propose d'étudier la loi jointe des variables aléatoires

$$\begin{cases} U = X^2 + Y^2, \\ V = \text{Arg}(X + iY) = \arctan\left(\frac{X}{Y}\right). \end{cases}$$

1) Pour toute fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} borélienne bornée on a

$$\mathbb{E}(f(U, V)) = \mathbb{E}(f(X^2 + Y^2, \text{Arg}(X + iY))) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x^2 + y^2, \text{Arg}(x + iy)) e^{-(x^2+y^2)/2} \frac{dx dy}{2\pi}$$

On fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = \text{Arg}(x + iy) \end{cases}$$

Plus précisément, on considère le \mathcal{C}^1 difféomorphisme φ défini de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \times \{0\}$ par

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} x = \sqrt{u} \cos v, \\ y = \sqrt{u} \sin v. \end{cases}$$

Calculons son jacobien : pour tout (u, v) ,

$$J_\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\cos v}{2\sqrt{u}} & -\sqrt{u} \sin v \\ \frac{\sin v}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u} \cos v \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

On a donc

$$\mathbb{E}(f(U, V)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\{u>0\}} du \mathbf{1}_{\{0<v<2\pi\}} \frac{dv}{2\pi}.$$

la loi du couple (U, V) admet donc une densité g par rapport à la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^2 donnée par

$$g(u, v) = \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\{u>0\}} \frac{\mathbf{1}_{\{0<v<2\pi\}}}{2\pi}.$$

Puisqu'elle est de la forme $g_1(u)g_2(v)$, les v.a. U et V sont indépendantes. Leurs lois respectives admettent chacun une densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

- la densité de U est $u \mapsto \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\{u>0\}}$, on reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre $1/2$,
- la densité de V est $v \mapsto \frac{\mathbf{1}_{\{0<v<2\pi\}}}{2\pi}$, on reconnaît la densité de la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$.