UFR MATHÉMATIQUES | UNIVERSITÉ RENNES 1
Licence 3ème année | Année 2006/2007

Intégration et probabilités - DM 2

Le devoir est à rendre à votre enseignant de TD au plus tard le vendredi 1er décembre. Vous devez rédiger au moins trois exercices parmi les cinq proposés.

Exercice 1.
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f et g deux fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{A})$.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}_+ \ ; \ f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_E f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\})\lambda(dt)$.
3. En déduire que, pour tout $p \geq 1$, $\displaystyle\int_E g^p \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}\mu(\{g \geq t\})\lambda(dt)$.
4. Que dire de $\displaystyle\int_E \varphi \circ f \, d\mu$ si φ est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0 ?
5. En considérant l'application de $E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $F : (x,s,t) \mapsto \mathbf{1}_{[s,+\infty[}(f(x))\mathbf{1}_{[t,+\infty[}(g(x))$, montrer que
$$\int_E fg \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \geq s\} \cap \{g \geq t\})\lambda(ds)\lambda(dt).$$

Exercice 2. *Fonction Beta d'Euler*
On rappelle que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \, dt.$$
Soit $\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x+y=0\big\}$. Soit la fonction φ de $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta, \quad \varphi(x,y) = \left(x+y, \ \frac{x}{x+y}\right).$$
Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Déterminer graphiquement $\varphi(]-\infty,-1]^2)$, $\varphi(]0,+\infty[^2)$ et $\varphi(]0,1]^2)$.
3. Montrer que la fonction $f : v \mapsto v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$ est L.I. sur $]0,1[$.

Soit ν la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité f.

4. Établir que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1} \, dx \, dy = \nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b)$ et en déduire $\nu(\mathbb{R})$.

Exercice 3. *Somme aléatoire de v.a. aléatoires*
Soient $X_0, \ldots, X_n$ $n+1$ v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées ; soit N une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ indépendante de $X_0, \ldots, X_n$. On pose

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Exprimer la fonction caractéristique de Y en fonction de celle de X_1.

Exercice 4. *Variables aléatoires exponentielles indépendantes*
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. On note $Z = \min(X,Y)$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z et en déduire sa loi.
2. Montrer $\mathbb{P}(Z = X) = \lambda/(\lambda+\mu)$.
3. Montrer que les variables aléatoires Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes.

Exercice 5. *Convergence dominée*
On considère la fonction réelle $u(x) = (1+|x|)^{-1}$.

1. Soit X une variable réelle. On considère, pour $s \geq 0$, $\theta(s) = \mathbb{E}[u(sX)]$.

   Montrer que θ est continue sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Exprimer $\theta'(s)$ comme une espérance. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$.

2. Soient U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $c \in]0,1[$. On considère la variable aléatoire $X = (U-c)^+$. Calculer, pour la variable X, $\theta(s)$ puis $\lim_{s\to+\infty} \theta(s)$. Est-ce cohérent avec la question précédente ?