

Intégration et probabilités - DM 1 - Corrigé

Exercice 1. Théorème d'Égorov

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^{(k)} \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \in E_n^{(k)} \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \quad |f_p(x) - f(x)| \leq 1/k.$$

Puisque $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, la dernière proposition est vraie (pour tout k) : pour tout k , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^{(k)} = E$. Il en est donc de même pour leur intersection : $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n^{(k)} = E$.

2. Remarquons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(E_n^{(k)})_n$ est croissante. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}$, $E_N^{(k)} = \bigcup_{n=0}^N E_n^{(k)}$. La suite d'ensembles $(E_N^{(k)})_N$ est une suite croissante d'éléments de \mathcal{A} qui converge vers E donc la suite $(\mu(E_N^{(k)}))_N$ converge en croissant vers $\mu(E)$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_{\varepsilon,k}$ tel que

$$\mu(E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)}) \geq \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{ou encore} \quad \mu\left(\left[E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)}\right]^c\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Posons alors $B_\varepsilon = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)}$ et montrons que l'on peut choisir $A_\varepsilon = B_\varepsilon^c$. Tout d'abord,

$$\mu(A_\varepsilon) = \mu(B_\varepsilon^c) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)c}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu\left(E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)c}\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

D'autre part,

$$x \in B_\varepsilon \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x \in E_{N_{\varepsilon,k}}^{(k)} \implies \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq N_{\varepsilon,k}, \quad |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

En d'autres termes,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq N_{\varepsilon,k}, \quad \sup_{x \in B_\varepsilon} |f_p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}.$$

3. Il faut passer au complémentaire et utiliser que la réunion (dénombrable) d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Attention, ceci n'est possible que parce que la mesure est finie. Par exemple, pour la mesure de Lebesgue, $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$ sont de mesure pleine mais leur intersection est de mesure nulle. On refait ensuite le même raisonnement que dans la question 1 en remplaçant E par $E \setminus A$.
4. Munissons \mathbb{R} de la mesure de Lebesgue et posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers 0 mais ne peut pas converger uniformément sur un ensemble non borné. En effet, pour $B \subset \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in B} |f_n(x)| = \frac{\max(|\inf(B)|, |\sup(B)|)}{n}.$$

Ainsi, si $(f_n)_n$ converge uniformément sur B alors B est borné et $\lambda(B^c) = +\infty$.

Exercice 2.

On fait le changement de variables $u = nt$:

$$n \int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}} dt = \int_0^n \frac{f(u)}{\sqrt{1+u/n}} du = \int \mathbf{1}_{[0,n]}(u) \frac{f(u)}{\sqrt{1+u/n}} du.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x) \frac{f(x)}{\sqrt{1+x/n}}.$$

La suite $(f_n)_n$ est une suite

1. croissante ($\forall n, f_n \leq f_{n+1}$) car, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{1}_{[0,n]}(x)/\sqrt{1+x/n}$ est une suite croissante en n ,
2. de fonctions positives (car f est positive),
3. qui converge vers f simplement.

D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}} dt = \int f d\lambda.$$

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $A_n = \{x \in \mathbb{R}, 2^n \leq x < 2^{n+1}\} = [2^n ; 2^{n+1}[$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une partition de \mathbb{R} ; c'est-à-dire que $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ et les $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont disjoints deux à deux. Ceci permet d'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = 1.$$

On découpe E selon les valeurs que prend $|f|$:

$$\int |f| d\mu = \int \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f| \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu$$

Puisque pour tout n , $|f| \mathbf{1}_{A_n}(|f|)$ est une fonction mesurable positive, le théorème de convergence monotone permet d'écrire :

$$\int \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f| \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int |f| \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu$$

Par définition de A_n et croissance de l'intégrale, on a l'encadrement suivant :

$$2^n \int \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu \leq \int |f| \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu \leq 2^{n+1} \int \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu.$$

et bien sûr,

$$\int \mathbf{1}_{A_n}(|f|) d\mu = \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}).$$

En résumé, on a encadré l'intégrale de $|f|$ de la façon suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) \leq \int |f| d\mu \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{n+1} \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le membre de droite est le double du membre de gauche. Il est donc fini si et seulement si le membre du milieu l'est aussi.