

Intégration et probabilités - DM 1

Le devoir est à rendre à votre enseignant de TD au plus tard le vendredi 20 octobre.

Exercice 1. *Un peu d'entropie*

Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On définit l'entropie relative ν par rapport à μ par

$$\text{Ent}(\nu|\mu) = \begin{cases} \int f \ln f d\mu & \text{si } \nu \text{ admet } f \text{ pour densité par rapport à } \mu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soit μ et ν deux mesures de Poisson sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de paramètres respectifs 1 et α . Montrer que ν admet pour densité par rapport à μ la fonction $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_\alpha(k) = e^{1-\alpha} \alpha^k.$$

Calculer $\text{Ent}(\nu|\mu)$. En déduire que $\text{Ent}(\nu|\mu)$ est positif et ne s'annule que si $\alpha = 1$.

2. On définit les mesures suivantes :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \mu_2 = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad \mu_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k.$$

Calculer $\text{Ent}(\mu_1|\mu_2)$, $\text{Ent}(\mu_1|\mu_3)$ et $\text{Ent}(\mu_3|\mu_1)$.

Exercice 2.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction intégrable.

1. On pose $A = \{x \in E, f(x) = +\infty\}$ l'ensemble sur lequel f est infinie.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = n\mathbf{1}_A$. Calculer l'intégrale de g_n par rapport à μ et la comparer à celle de f .

(b) En déduire que $\mu(A) = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \{x \in E, f(x) \geq n\}$.

(a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n)$ est finie et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mu(A_n) = 0.$$

Exercice 3. *Intervention de limite et d'intégrale*

Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \int_{]0, \infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \lambda(dt) \quad \text{et} \quad u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi(1+|t|^{2+1/n})}.$$

Exercice 4.

Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$, f soit bornée sur A_ε , et

$$\int_{E \setminus A_\varepsilon} |f| d\mu < \varepsilon.$$

On pourra considérer les ensembles $B_n = \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$ et appliquer le théorème de Beppo Levi aux fonctions $|f| \mathbf{1}_{B_n}$.

2. En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \leq \eta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

Exercice 5. *Intervention de série et d'intégrale*

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum_n f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.

2. Comparer $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) dx$. Expliquer.