Université de Rennes 1 **Licence de mathématiques**
Année 2004-2005

Intégration et probabilités

Examen terminal - Corrigé

Exercice 1.
1) On a

$$\mu(\mathbb{R}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[e^x]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

La fonction de répartition de μ est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{2e^x+1}{2e^x+2} = 1 - \dfrac{1}{2e^x+2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La mesure μ charge l'unique point 0 (seul point de discontinuité de F).

2) La fonction g_α est mesurable positive donc

$$\int g_\alpha\,d\mu = \int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\frac{e^x}{2(e^x+1)^2}\,dx + \frac{1}{4}g_\alpha(0) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(\alpha+1)x}}{(e^x+1)^2}\,dx + \frac{1}{4}.$$

L'intégrande est continu sur $\mathbb{R}_+$ et est équivalent à $e^{(\alpha-1)x}$ en $+\infty$. L'intégrale est donc finie si et seulement si $\alpha < 1$.

3) On applique le théorème de Tonelli à la fonction mesurable positive $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{1}_{\{\varphi(x)\geq t\}}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{\varphi(x)\geq t\}}\,\mu(dx)dt &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{\{\varphi(x)\geq t\}}\,dt\right]\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,\mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\left[\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{\varphi(x)\geq t\}}\,\mu(dx)\right]dt = \int_0^{+\infty}\mu(\{x\ ;\ \varphi(x)\geq t\})\,dt. \end{aligned}$$

4)Puisque g_α est positive, $\mu(\{x\ ;\ \varphi(x)\geq 0\}) = 1$. D'autre part, pour tout $t > 0$,

$$\mu(\{x\ ;\ \varphi(x)\geq t\}) = \mu\left(\left\{x \geq \frac{\ln t}{\alpha}\vee 0\right\}\right) = \begin{cases} \mu(\mathbb{R}_+) = \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 - \mu\left(\left\{x < \ln\left(t^{1/\alpha}\right)\right\}\right) = \dfrac{1}{2t^{1/\alpha}+2} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty}\mu(\{x\ ;\ \varphi(x)\geq t\})\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}\,dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{2t^{1/\alpha}+2}\,dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^{1/\alpha}}\,dt. \end{aligned}$$

5) Pour $\alpha = 1/2$, on obtient donc, d'après les questions 2 et 4,

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{3/2}}{(e^x+1)^2}\,dx + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\text{Arctan } x]_1^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

En posant $u = e^x$ pour $x > 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{3/2}}{(e^x+1)^2}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{(1+u)^2}\,du$. En conséquence, on retrouve $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{(1+u)^2}\,du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Exercice 2.

1) D'après le théorème de Fubini, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_1X_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{itxy} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{itxy} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{X_1}(ty)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2y^2/2)\,dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-(1+t^2)y^2/2\right) dy \overset{u=\sqrt{1+t^2}y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left(-u^2/2\right) \frac{du}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.
\end{aligned}$$

2) Par indépendance des variables aléatoires,

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\big(e^{itX_1X_2}e^{itX_3X_4}\big) = \mathbb{E}\big(e^{itX_1X_2}\big)\mathbb{E}\big(e^{itX_3X_4}\big) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{itz} e^{-|z|} \frac{dz}{2} = \int_{-\infty}^0 e^{itz} e^z \frac{dz}{2} + \int_0^{+\infty} e^{itz} e^{-z} \frac{dz}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1+it)z}}{1+it}\right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-1+it)z}}{-1+it}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it} - \frac{1}{-1+it}\right) = \frac{1}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

4) Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, Y et Z ont même loi.

Exercice 3.

1) Si $|f(x)| \geq 2$, alors, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\mathbf{1}_{A_n} \leq 1$,

$$|\mathbf{1}_{A_n}(x) - f(x)| \geq |f(x)| - |\mathbf{1}_{A_n}(x)| \geq 2 - 1 = 1.$$

Ainsi, $\{|f| \geq 2\} \subset \{|\mathbf{1}_{A_n} - f| \geq 1\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité de Markov, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{|f| \geq 2\}) \leq \mu(\{|\mathbf{1}_{A_n} - f| \geq 1\}) \leq \int |\mathbf{1}_{A_n} - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\mu(\{|f| \geq 2\}) = 0$ ou encore $|f| \leq 2\ \mu - p.p.$

2) En remarquant que $\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_n}^2$, on a

$$\int \left|\mathbf{1}_{A_n} - f^2\right| d\mu = \int \left|\mathbf{1}_{A_n}^2 - f^2\right| d\mu = \int |\mathbf{1}_{A_n} - f||\mathbf{1}_{A_n} + f|\,d\mu \leq 3\int |\mathbf{1}_{A_n} - f|\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3) Par l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \left|f - f^2\right| d\mu \leq \int |\mathbf{1}_{A_n} - f|\,d\mu + \int \left|\mathbf{1}_{A_n} - f^2\right| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme $\left|f - f^2\right|$ est positive d'intégrale nulle, c'est qu'elle est nulle presque sûrement. Or si $f(x) - f(x)^2 = 0$ alors $f(x) \in \{0, 1\}$. En posant $A = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\}$, on obtient $f = \mathbf{1}_A$. Remarquons que $A \in \mathcal{A}$ puisque f est mesurable.

4) Notons $C = \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} B_k$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$C^c = \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} (A_k \Delta A) \subset \cup_{k\geq n}(A_k \Delta A).$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(C^c) = \mu(\cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} (A_k \Delta A)) \leq \mu(\cup_{k\geq n}(A_k \Delta A)) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k \Delta A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

L'ensemble C^c est donc de mesure nulle. Puisque la suite $(\mathbf{1}_{A_n}(x))_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, elle converge vers $\mathbf{1}_A(x)$ si et seulement si elle est constante égale à $\mathbf{1}_A(x)$ à partir d'un certain rang. Donc

$$x \in C \Leftrightarrow \exists n \geq 1,\ \forall k \geq n,\ x \notin A_n \Delta A \Leftrightarrow \exists n \geq 1,\ \forall k \geq n,\ |\mathbf{1}_{A_n}(x) - \mathbf{1}_A(x)| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}_{A_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{1}_A(x).$$

On en conclut donc que $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_A$.