

Intégration et probabilités - Correction du DM 1

Exercice 1.

1) Pour tout $k \geq 1$ fixé, posons

$$f_n(k) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathbf{1}_{[1,n]}(k) \geq 0 \quad \text{et remarquons que} \quad \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathbf{1}_{[1,n]}(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k}.$$

D'après le lemme de Fatou appliqué à la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ et la mesure de comptage γ sur \mathbb{N} ,

$$\liminf u_n = \liminf \int f_n d\gamma \geq \int \liminf f_n d\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

On peut donc conclure que $\lim_n u_n = +\infty$.

2) La formule demandée se déduit de l'expression de la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $1 - x/n$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^k dx \stackrel{x=nu}{=} n \int_{1/n}^1 (1-u)^k du = n \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1} \right]_{1/n}^1 = \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

On a donc

$$\int \left(1 + \left(1 - \frac{x}{n}\right) + \dots + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = u_n.$$

D'autre part,

$$\int_1^n \frac{n}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) dx = \int_1^n \frac{n}{x} dx - \int_1^n \frac{n}{x} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = n \ln n - n \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x}.$$

En utilisant l'égalité précédemment obtenue, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_1^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x}$.

3) Pour $n \geq 1$, soit f_n la fonction positive mesurable (car continue par morceaux) définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[1,n]}(x).$$

Remarquons que pour tout $x \geq 1$, $f_n(x)$ converge vers e^{-x}/x . Soit $n \geq 1$ fixé. On définit g_n sur $[0, +\infty[$ par

$$g_n(x) = \ln \left(\frac{e^{-x}}{(1-x/n)^n} \right) \mathbf{1}_{[0,n]}(x) = -x - n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

Alors $g_n(0) = 0$ et pour $x \in [0, n[$, $g'_n(x) = x/(n-x) \geq 0$. Donc g_n est positive. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| = f_n(x) \leq e^{-x}/x$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Remarque 1. Pour la domination, on peut remarquer que $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, ce qui implique que, pour $x \in [0, n]$, $n \ln(1-x/n) \leq -x$ et donc que $f_n(x) \leq e^{-x}/x$.

Remarque 2. On ne sait pas calculer explicitement cette intégrale, sa valeur est appelée constante d'Euler.

Exercice 2. Mesure gaussienne

1) L'application f définie de $[0, +\infty[^2$ dans \mathbb{R} par $(t, x) \mapsto \frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}$, est continue sur $[0, +\infty[^2$ et, pour tout $t \geq 0$, $|f(t, x)| \leq 1/(1+x^2)$ qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de continuité de Lebesgue, G est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = -e^{-t(1+x^2)}$. Soit $a > 0$, alors, pour tout $t \geq a$, $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq e^{-a(1+x^2)}$ qui est intégrable sur \mathbb{R}_+ . D'après le théorème de dérivation de Lebesgue, G est dérivable sur $]a, +\infty[$ et

$$G'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x^2)} dx = -e^{-t} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx.$$

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, le résultat est vrai pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A e^{-tx^2} dx \stackrel{u=\sqrt{t}x}{=} \int_0^{\sqrt{t}A} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{t}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{t}}$$

On a donc bien, pour tout $t > 0$, $G'(t) = -\frac{Ie^{-t}}{\sqrt{t}}$ avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

3) Soit $t > 0$ et $\varepsilon \in]0, t[$. D'après ce qui précède, G' est continue sur $[\varepsilon, t]$ donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral,

$$G(t) - G(\varepsilon) = \int_\varepsilon^t G'(u) du = -I \int_\varepsilon^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \stackrel{x=\sqrt{u}}{=} -I \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx$$

Comme G est continue en 0, on obtient $G(t) - G(0) = -2I \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx$ pour tout $t > 0$.

4) Soit $(t_n)_n$ une suite de réels positifs qui tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \frac{e^{-t_n(1+x^2)}}{1+x^2}$. Comme les fonctions (f_n) sont continues, majorées par la fonction intégrable $1/(1+x^2)$ et que (f_n) converge vers la fonction nulle, le théorème de convergence dominée assure que $\lim G(t_n) = \lim \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+} \lim f_n d\lambda = 0$. Ainsi, G tend vers 0 en $+\infty$. Enfin, $G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$, donc $I^2 = \pi/4$ ou encore $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5) Pour montrer que μ est une mesure de probabilité, on fait le changement de variables $u = \sqrt{2}x$ et on utilise la bonne valeur de I . Pour l'intégrabilité de $x \mapsto x^n$, on écrit

$$\left| x^n e^{-x^2/2} \right| \leq \underbrace{|x|^n e^{-x^2/4}}_{\text{bornée}} \underbrace{e^{-x^2/4}}_{\text{intégrable}}.$$

Par parité, les intégrales de x et x^3 sont nulles. D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et tous A et B positifs, on procède à l'intégration par partie suivante :

$$\int_{-A}^B x^{2n} e^{-x^2/2} dx = \left[-x^{2n-1} e^{-x^2/2} \right]_{-A}^B + \int_{-A}^B (2n-1)x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx \xrightarrow{A, B \rightarrow +\infty} (2n-1) \int_{\mathbb{R}} x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} x^4 \mu(dx) = 3 \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx) = 3.$$

6) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-A}^B e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \int_{-A}^B e^{t^2/2} e^{-(x-t)^2/2} dx \stackrel{u=x-t}{=} e^{t^2/2} \int_{-A-t}^{B-t} e^{-u^2/2} du \xrightarrow{A, B \rightarrow +\infty} e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} dx.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $L_\mu(t) = e^{t^2/2}$.

Remarque : on pouvait aussi montrer que L_μ est solution de $y' = ty$ avec condition initiale $y(0) = 1$.

7) Il est clair d'après sa forme explicite que L_μ est de classe \mathcal{C}^∞ . En raisonnant par récurrence, on obtient par le théorème de dérivation de Lebesgue que

$$L_\mu^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{tx} \mu(dx).$$

En particulier, $\int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx) = L_\mu^{(n)}(0)$. On retrouve les résultats de la question 5 en calculant les dérivées successives de L_μ en 0.

Exercice 3.

1) On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < s < u_0$ et $x \in \mathbb{R}$, $e^{s|x|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s|x|)^k}{k!} \geq \frac{s^n |x|^n}{n!}$.

2) On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n \mu(dx) \leq \frac{n!}{s^n} \int e^{s|x|} \mu(dx) \leq \frac{n!}{s^n} \int (e^{-sx} + e^{sx}) \mu(dx) = \frac{n!}{s^n} (L_\mu(s) + L_\mu(-s)) < +\infty,$$

Ceci implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction mesurable (car continue) $x \mapsto x^n$ est μ -intégrable.

3) Les fonctions h et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mesurables. Elles sont donc λ -intégrables si $x \mapsto e^{tx}$ et $x \mapsto |x|^n$ sont μ -intégrables, ce qui est le cas d'après les hypothèses et la question 1.

4) Soit $t \in]-s, s[$. On applique le corollaire du théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions à la suite de fonctions continues $(h_n - h_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ (en posant $h_{-1} = 0$) dont la somme converge vers h et telle que

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} |(h_n - h_{n-1})(x)| \lambda(dx) \leq \int \sum_{n=0}^{\infty} f(x) \frac{s^n |x|^n}{n!} \lambda(dx) \leq \int f(x) (e^{-sx} + e^{sx}) \lambda(dx) < +\infty,$$

On conclut alors que pour tout $t \in]-s, s[$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} t^k = \lim_n \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{k!} t^k = \int \lim_n h_n d\lambda = \int h d\lambda = L_\mu(t).$$

Remarquons que $\sum_{k=0}^{\infty} |m_k| s^k / k! < +\infty$ donc $L_\mu(t)$ est développable en série entière sur le disque centré en 0 de rayon s , pour tout $s < u_0$. On obtient la conclusion souhaitée.

5) La série entière est de classe \mathcal{C}^∞ dans son disque de convergence, donc pour tout $|t| < u_0$,

$$L_\mu^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k(k-1) \cdots (k-n+1) m_k}{k!} t^{k-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_{n+l}}{l!} t^l.$$

En particulier, $m_n = L_\mu^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Exemple 1 :

$$L_{\mu_1}(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \left[\frac{e^{tx}}{t} \right]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Le domaine de définition de L_{μ_1} est \mathbb{R} .

Exemple 2 :

$$L_{\mu_2}(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-(\alpha-t)x} dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-t} & \text{si } t < \alpha \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le domaine de définition de L_{μ_2} est $] -\infty, \alpha[$.

Exemple 3 :

$$L_{\mu_3}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \lambda(dx) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le domaine de définition de L_{μ_3} est $\{0\}$.