Intégration et probabilités - CC 3

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Un barème indicatif est donné pour chaque partie du sujet. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. *(4 points)*
Soit X et Y deux v.a. indépendantes. On suppose que X suit la loi $\mathcal{E}(1)$ et que $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=-1)=1/2$. On pose $Z=XY$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de de X et Y. En déduire celles de Z.
2. Montrer que la loi de Z admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Exercice 2. *(7 points)*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre p et T une variable aléatoire indépendante de la suite précédente et de loi géométrique de paramètre r. On note $S=\sum_{k=1}^{T} X_k$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de T est donnée par

$$\varphi_T(t) = \frac{re^{it}}{1-(1-r)e^{it}}.$$

2. Déterminer la fonction caractéristique de S.
3. En déduire que S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 3. *(9 points)*
Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $S=2\pi U$ et $T=-2\ln(V)$.

1. Quelle est la loi de S ? Donner son espérance et sa variance.
2. Calculer la fonction de répartition de T. En déduire que T suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
3. Montrer que, pour toute fonction borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-(x^2+y^2)/2}\frac{1}{2\pi}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{t}\cos s, \sqrt{t}\sin s)\frac{1}{2}e^{-t/2}\mathbf{1}_{\{t>0\}}\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(s)\,dt\,ds.$$

4. On pose $X=\sqrt{T}\cos S$ et $Y=\sqrt{T}\sin S$. Montrer que X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Rappels.

Une v.a. T suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Une v.a. T suit la loi géométrique de paramètre r si, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(T=k) = r(1-r)^{k-1}.$$

Une v.a. S suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$) si elle admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

Une v.a. X suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$