UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Licence $3^{\text{ème}}$ année — Année 2006/2007

Intégration et probabilités - CC 2' - Corrigé

Question de cours. *(5 points)*

Puisque la fonction $(x,y) \mapsto \alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}$ est mesurable positive, le théorème de Tonelli assure que, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\,dx\right)dy.$$

Pour tout $y>0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\,dx = \beta e^{-\beta y}\int_0^y \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \beta e^{-\beta y}\big(1-e^{-\alpha y}\big) = \beta e^{-\beta y} - \beta e^{-(\alpha+\beta)y}.$$

Pour $y \leq 0$, l'intégrale ci-dessus est nulle. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \alpha e^{-\alpha x}\beta e^{-\beta y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{\{y>0\}}\Big(\beta e^{-\beta y} - \beta e^{-(\alpha+\beta)y}\Big)\,dy = 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

ce qui est bien le résultat demandé.

Exercice 1. *(6 points)*

1. La fonction f_n est continue et positive sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et équivalente en $+\infty$ à $x \mapsto (\pi/2)e^{-x^n}$ dont l'intégrale converge puisque cette fonction est négligeable devant $x \mapsto 1/(1+x^2)$ en $+\infty$. L'intégrale de f_n est donc un réel positif.

2. Discutons selon la valeur de x :
   - Pour tout $x \leq 0$, $f_n(x) = 0$ donc $(f_n(x))_n$ converge vers 0.
   - Pour tout $x \in]0,1[$, $(\arctan(nx))_n$ converge vers $\pi/2$ et $(e^{-x^n})_n$ converge vers 1 (car x^n converge vers 0) donc $(f_n(x))_n$ converge vers $\pi/2$.
   - Pour $x = 1$, $f_n(x) = \arctan(n)e^{-1}$ donc $(f_n(x))_n$ converge vers $\pi/(2e)$.
   - Pour tout $x > 1$, $(e^{-x^n})_n$ converge vers 0 donc $(f_n(x))_n$ converge vers 0.

En résumé, la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\mathbf{1}_{]0,1[} + \frac{\pi}{2e}\mathbf{1}_{\{1\}}(x).$$

3. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan(y) \leq \pi/2$. Pour tout $x \leq 0$, $f_n(x) = 0 = g(x)$. Pour tout $x \in [0,1]$, e^{-x^n} est majoré par 1 donc $f_n(x) \leq g(x)$. Enfin, pour tout $x > 1$, $x^n \geq x$ donc $e^{-x^n} \leq e^{-x}$ et donc $f_n(x) \leq g(x)$. En résumé $f_n \leq g$.

4. La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2. *(10 points)*

1. Pour tout $x \in]-1,1[$ la fonction $t \mapsto t^x/(1+t^2)$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$, équivalente à $t \mapsto t^x$ en 0 et à $t \mapsto t^{x-2}$ en l'infini donc son intégrale est bien un réel (positif) d'après le critère de Riemann.

Notons f la fonction définie sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall t>0, \quad f(x,t) = \frac{t^x}{1+t^2} = \frac{e^{x\ln t}}{1+t^2}.$$

Pour tout $t>$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue. De plus, pour tout $x \in [a,A]$ avec $-1<a<A<1$ et tout $t>0$, on a

$$f(x,t) \leq g(t)$$

où g est la fonction intégrable définie pour tout $t>0$ par

$$g(t) = \frac{e^{a\ln t}}{1+t^2}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) + \frac{e^{A\ln t}}{1+t^2}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) = \frac{t^a}{1+t^2}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) + \frac{t^A}{1+t^2}\mathbf{1}_{]1,+\infty]}(t).$$

On en déduit que F est continue sur $]a,A[$ et par suite sur $]-1,1[$.

2. Soit $(x_n)_n$ une suite de réels de $]-1,1[$ qui converge vers 1. Notons $f_n(t) = f(x_n,t)$ pour tout $t>0$. Le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions mesurables positives (f_n) assure que

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n(t)\,dt \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$$

Or on a

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} f(x_n,t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

dont l'intégrale sur $]0,+\infty[$ vaut $+\infty$. Ceci étant vrai pour toute suite qui converge vers 1, on en déduit que F tend vers $+\infty$ en 1. On procède de même en -1. En version courte, cela donne :

$$\liminf_{x\to -1} F(x) \geq \int \liminf_{x\to -1} f(x,t)\,dt = \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = +\infty,$$

c'est-à-dire que F tend vers $+\infty$ en -1.

3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à sa première variable et

$$\partial_x f(t,x) = \frac{t^x \ln t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{xx} f(t,x) = \frac{t^x(\ln t)^2}{1+t^2}.$$

De plus, pour tout $x \in]a,A[$ avec $-1<a<A<1$,

$$|\partial_x f(t,x)| \leq g(t)|\ln t| \quad \text{et} \quad \left|\partial^2_{xx} f(t,x)\right| \leq g(t)|\ln t|^2.$$

Les fonctions $t \mapsto g(t)|\ln t|$ et $t \mapsto g(t)|\ln t|^2$ sont intégrables en vertu du critère de Bertrand (donné en rappels). Le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre assure donc que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,A[$ et donc sur $]-1,1[$. On a de plus,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x \ln t}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x(\ln t)^2}{1+t^2}\,dt.$$

4. **Question hors barême.** On applique l'inégalité de Hölder avec
- la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$,
- les fonctions $t \mapsto t^{x/2}/\sqrt{1+t^2}$ et $t \mapsto t^{x/2}\ln t/\sqrt{1+t^2}$,
- les exposants conjugués $p=q=2$ (c'est en fait l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

On obtient

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^{x/2}}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{t^{x/2}\ln t}{\sqrt{1+t^2}}\right)dt \leq \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^x(\ln t)^2}{1+t^2}\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{F(x)F''(x)},$$

ce qui est bien le résultat demandé.