

Intégration et probabilités - CC 2'

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Un barème indicatif est donné pour chaque partie du sujet. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Question de cours. (5 points) Soit α et β deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y} \mathbf{1}_{\{0 < x < y\}} dx dy = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

On précisera le théorème utilisé.

Exercice 1. (6 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(nx) e^{-x^n} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \quad \text{et} \quad u_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien un nombre réel positif.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
3. Pour $n \geq 1$, comparer f_n à la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\pi}{2} \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}} + \frac{\pi}{2} e^{-x} \mathbf{1}_{\{x > 1\}}.$$

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\pi/2$.

Exercice 2. (10 points)

On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x)$ est un réel positif et que la fonction F est continue sur $] -1, 1[$. On pourra se placer sur $]a, A[$ pour $-1 < a < A < 1$ quelconques.
2. Déterminer les limites de F en 1 et -1 . On pourra utiliser le lemme de Fatou.
3. Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur $] -1, 1[$.
4. **Question hors barème.** Montrer, grâce à l'inégalité de Hölder, que

$$F'(x)^2 \leq F(x)F''(x).$$

Rappels

Si f est une fonction continue sur \mathbb{R}_+^* telle que

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha < 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1,$$

et telle que

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1,$$

alors f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .