Université de Rennes 1 **Licence de mathématiques**
Année 2005-2006

Intégration et probabilités
Corrigé du contrôle continu 2

Exercice 1. *(5 pts)*

Pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto ne^{-nx}$ est continue et positive. D'après le corollaire du théorème de convergence monotone,

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

De plus, $x \mapsto ne^{-nx}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} ne^{-nx}\,dx = \left[e^{-nx}\right]_1^{+\infty} = e^{-n}.$$

On en déduit que

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = e^{-1}\frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

Exercice 2. *(11 pts)*

1. L'application $f : (x,t) \mapsto e^{-xt^2}/(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

   Or $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
   De plus, d'après le théorème de convergence dominée, pour toute suite $(x_n)_n$ de réels positifs qui converge vers $+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f(x_n,t)\,dt = 0.$$

2. Pour tout $t \geq 0$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

   Soit $a > 0$. Pour tout $x > a$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right| \leq \frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2},$$

   et $t \mapsto t^2 e^{-at^2}/(1+t^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$. Puisque a est quelconque, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt.$$

De plus, pour toute suite $(x_n)_n$ de réels strictement positifs qui converge vers 0, le lemme de Fatou assure que

$$\liminf_n(-F'(x_n)) = \liminf_n \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-x_nt^2}}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^{+\infty} \liminf_n \frac{t^2e^{-x_nt^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = +\infty.$$

Donc $F'(x)$ converge vers $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

3. Pour tout $x > 0$, on a, d'après les calculs précédents,

$$F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt.$$

Grâce au changement de variables $u = t\sqrt{x}$ qui est bien bijectif pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) - F'(x) = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

4. Puisque $C'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x))$, on a

$$C'(x) = -\frac{Ie^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Il suffit alors d'intégrer cette relation entre 0 et x pour obtenir

$$C(x) = C(0) - \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$$

On fait ensuite le changement de variables $v = \sqrt{u}$ et il vient

$$C(x) = C(0) - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-v^2}\,du.$$

5. Par définition de C, $C(0) = F(0)$. Par définition de F on a

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient alors en exprimant C en fonction de F :

$$F(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt\right).$$

6. D'après la question 1, F tend vers 0 en $+\infty$. Ceci implique que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = 0.$$

Or, par définition de l'intégrale impropre,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = I.$$

On en déduit que $2I^2 = \pi/2$ ou encore (puisque $I > 0$) que $I = \sqrt{\pi}/2$.