

Intégration et probabilités - CC 2

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Un barème indicatif est donné pour chaque partie du sujet. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

Question de cours. (4 points)

Calculer l'intégrale de la fonction

$$f(x, y) = y \exp(-y^2(1+x^2)/2) \mathbf{1}_{\{x>0\}} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

On précisera le théorème utilisé.

Exercice 1. (11 points)

1. Montrer que l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

converge pour tout $x > 0$.

2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$. On pourra raisonner dans un premier temps sur l'intervalle $[a, A]$ avec $0 < a < A < +\infty$ et écrire $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

3. Déterminer les limites de Γ en 0 et $+\infty$. On pourra utiliser le lemme de Fatou.

4. Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et calculer Γ' et Γ'' . En déduire que Γ est strictement convexe.

5. Établir que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que

$$\Gamma(x) \sim \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

6. **Question hors barème.** Quelle est la partie entière du point x_0 où Γ atteint son minimum? On pourra comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Tracer le graphe de Γ .

Exercice 2. (6 points)

Soit μ une mesure sur \mathbb{R} telle que

$$\mu(]-\infty, 0]) = 0 \quad \text{et} \quad \mu([0, +\infty[) = 1.$$

Pour $x \geq 0$, on pose $L_\mu(x) = \int e^{-xt} \mu(dt)$.

1. Calculer L_{μ_1} si $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$. Même question avec μ_2 admettant $t \mapsto e^{-t}\mathbf{1}_{\{t>0\}}$ pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. Dans le cas général, montrer que L_μ est continue sur \mathbb{R}_+ .

3. Déterminer sa limite en $+\infty$. On prendra garde au fait que $\mu(\{0\})$ peut ne pas être nul et on confrontera le résultat à ceux de la question 1.