

## Intégration et probabilités - CC 1

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Un barème indicatif est donné pour chaque partie du sujet. Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction.

### Question de cours. (5 points)

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable.

1. Donner la définition d'une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ .
2. Montrer que si  $\mu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ , alors, pour toute suite croissante  $(B_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ ,

$$\mu(\cup_{n \geq 0} B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B_n).$$

### Exercice 1. (9 points)

Soit  $\rho > 0$ . On définit sur  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , l'ensemble des parties de  $\mathbb{N}$ , l'application  $\mu$  suivante :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mu(A) = \begin{cases} \sum_{k \in A} \rho^k & \text{si } A \text{ est de cardinal fini,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est de cardinal infini.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tous  $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$  deux à deux disjoints,

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

2. Soit  $A = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$  l'ensemble des entiers naturels pairs. Calculer les quantités suivantes pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mu(A), \quad \mu(A^c), \quad \mu(\{0, \dots, n\}), \quad \mu(A \cap \{0, \dots, 10\}), \quad \mu(A \cap \{0, \dots, n\}).$$

3. Pour quelles valeurs de  $\rho$ , l'application  $\mu$  est-elle une mesure ?

### Exercice 2. (9 points)

Soit  $\lambda > 0$ . On considère la mesure sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  définie par

$$\mu = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n.$$

On définit sur  $\mathbb{N}$  les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_1(n) = n, \quad f_2(n) = n^2, \quad f_3(n) = n! \quad f_4(n) = (-1)^n n!$$

1. Déterminer celles qui sont intégrables par rapport à  $\mu$ . On discutera éventuellement selon la valeur de  $\lambda$ .
2. Dans le(s)quel(s) de ces quatre cas, la notation  $\int f_i d\mu$  a-t-elle un sens ? Lorsque c'est le cas, donner la valeur de cette intégrale.