

Intégration et probabilités - Compléments

Ce petit texte aborde des questions non triviales relatives à la théorie de l'intégration de Lebesgue. Certains points auxiliaires du raisonnement ne sont pas démontrés. Vous pouvez si vous le souhaitez consulter par exemple [BP04] pour plus de détails.

1 Ensemble de Cantor

Proposition 1.1 *Il existe un ensemble borélien $K \subset [0, 1]$ équipotent à \mathbb{R} , compact, d'intérieur vide, sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle.*

La construction de l'ensemble de Cantor est récursive et obéit au principe suivant : on pose

$$A_1 = [0 ; 1/3] \quad \text{et} \quad A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2 + A_n}{3}, \quad n \geq 1.$$

En d'autres termes, on découpe $[0, 1]$ en trois intervalles égaux et l'on supprime celui du milieu (en gardant les extrémités) : il reste deux intervalles. On les découpe en trois intervalles égaux et l'on supprime ceux du milieu... On obtient ainsi pour les premiers ensembles :

$$A_0 = [0, 1], \quad A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \dots$$

On vérifie immédiatement par récurrence que

$$A_n = \bigcup_{t \in T_n} \left[\frac{t}{3^n}, \frac{t+1}{3^n} \right], \quad \text{avec} \quad T_n = \left\{ 2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} \quad \text{avec} \quad x_k \in \{0, 1\} \right\}.$$

et A_n est donc la réunion de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints, de longueur 3^{-n} . L'**ensemble de Cantor** est alors défini comme l'intersection décroissante de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$: $K = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. L'ensemble de Cantor est **borélien** comme intersection dénombrable de boréliens et fermé comme intersection de fermés. Comme $K \subset [0, 1]$, K est **compact**. Il est de **mesure de Lebesgue nulle** car

$$\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n = 0.$$

Comme K est de mesure nulle, il ne peut contenir un intervalle ouvert : on dit qu'il est d'**intérieur vide**. On peut également montrer que K est **sans point isolé**, c'est-à-dire que pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, $K \setminus \{x\} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset$.

De plus, K contient $\left\{ 2 \sum_{k \geq 1} x_k 3^{-k}, \text{ avec } x_k \in \{0, 1\} \right\}$ puisque chacun de ces réels appartient à tous les $(A_n)_{n \geq 1}$. On montre en fait K est égal à l'ensemble de ces sommes :

$$K = \left\{ 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_k}{3^k} \quad \text{avec} \quad x_k \in \{0, 1\} \right\}.$$

Comme K est inclus dans $[0, 1]$, son cardinal est inférieur à celui de $[0, 1]$ (qui est celui de \mathbb{R}). Montrons à présent que le cardinal de K est supérieur à celui de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ (qui a même cardinal que \mathbb{R}). L'application φ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans K qui à une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ associe le réel $2 \sum_{k \geq 1} x_k 3^{-k}$ est une injection. Si $\sum_{k \geq 1} 2x_k 3^{-k} = \sum_{k \geq 1} 2y_k 3^{-k}$ avec $x_k, y_k \in \{0, 1\}$, alors $(x_n)_{n \geq 1} = (y_n)_{n \geq 1}$. Dans le cas contraire, l'entier $k_0 = \min \{k, x_k \neq y_k\}$ serait fini. Or, quitte à intervertir les deux suites, on peut supposer $x_{k_0} = 0$ et $y_{k_0} = 1$, d'où

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{3^k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{y_k - x_k}{3^k} \geq \frac{2}{k_0} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^{k_0}},$$

ce qui est absurde. Ainsi, $\text{Card}K = \text{Card}\mathbb{R}$.

Remarque 1.2 *Nous avons montré plus haut que la paramétrisation φ de K était injective mais elle n'est pas bijective : ainsi, $1 = \sum_{n \geq 1} 2/3^n$: il n'y a pas unicité de la décomposition en base 3 si l'on n'interdit pas les développements dits impropres composés d'une suite qui devient constante égale à 1 à partir d'un certain rang.*

2 Fonction de Lebesgue

Proposition 2.1 *Il existe une fonction F continue croissante sur $[0, 1]$ telle que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et $F' = 0$ λ -p.p. dans $[0, 1]$. En particulier, on a*

$$\int_{[0,1]} F'(x) \lambda(dx) = 0 < 1 = F(1) - F(0).$$

On construit F en utilisant les approximations introduites pour construire l'ensemble de Cantor. Soit $(F_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], \quad F_n(x) = (3/2)^n \int_0^x \mathbf{1}_{A_n}(t) dt.$$

Il est clair que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$ puisque $\lambda(A_n) = (2/3)^n$. De même, la fonction F_n est continue et croissante sur $[0, 1]$. Par ailleurs, si I désigne l'un des 2^n intervalles compacts dont la réunion forme A_n , on a, par définition de A_n et A_{n+1} , $\lambda(I) = 3^{-n}$ et $\lambda(I \cap A_{n+1}) = (2/3)\lambda(I)$, d'où

$$(3/2)^n \int_I \mathbf{1}_{A_n}(t) dt = (3/2)^{n+1} \int_I \mathbf{1}_{A_{n+1}}(t) dt = 2^{-n}.$$

En outre, F_n , d'après sa définition, est constante sur chacun des $(2^n - 1)$ intervalles ouverts composants A_n^c ; il en est de même de la fonction F_{n+1} puisque $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. L'égalité précédente entraîne alors que

$$\begin{aligned} \forall x \in A_n^c, \quad F_n(x) &= \sum_{I \subset A_n \cap [0, x]} (3/2)^n \int_I \mathbf{1}_{A_n}(t) dt \\ &= \sum_{I \subset A_n \cap [0, x]} (3/2)^{n+1} \int_I \mathbf{1}_{A_{n+1}}(t) dt = F_{n+1}(x), \end{aligned}$$

où I est l'un des 2^n intervalles composants A_n . En particulier, pour un tel intervalle I , $F_{n+1}(\min I)$ est égal à $F_n(\min I)$, d'où, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| &\leq |F_{n+1}(x) - F_{n+1}(\min I)| + |F_n(x) - F_n(\min I)| \\ &\leq (3/2)^{n+1} \int_I \mathbf{1}_{A_{n+1}}(t) dt + (3/2)^n \int_I \mathbf{1}_{A_n}(t) dt = 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\sup_{x \in [0, 1]} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n+1}$. La suite de fonctions $(F_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers une fonction F continue. De plus, comme les fonctions $(F_n)_{n \geq 1}$ sont croissantes (cette fois-ci, ce sont les fonctions qui sont croissantes, pas la suite), F l'est aussi.

D'autre part, sur chacun des intervalles (ouverts) dont A_n^c est la réunion, $F_{m+1} = F_m$ pour $m \geq n$ puisque $A_n^c \subset A_m^c$. Donc $F = F_n$ sur A_n^c ; or, de par

sa définition, la fonction F_n est constante sur chacun de ces intervalles ouverts. En particulier, F y est dérivable de dérivée nulle. Finalement, F est dérivable de dérivée nulle sur la réunion des ensembles $(A_n^c)_{n \geq 1}$, c'est-à-dire sur K^c ; donc $F' = 0$ λ -p.p. puisque $\lambda(K) = 0$.

Remarque 2.2 On peut prolonger la fonction F à \mathbb{R} en posant $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1$ si $x > 1$. En tant que fonction croissante sur \mathbb{R} , F définit une mesure de Stieljes ν_K sur \mathbb{R} appelée mesure de Cantor. C'est une mesure de probabilité telle que $\nu_K(K^c) = 0$.

3 Un ensemble non borélien

Proposition 3.1 La tribu borélienne de \mathbb{R} est strictement incluse dans l'ensemble des parties de \mathbb{R} : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On considère la relation binaire sur $[0, 1[$ définie par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur $[0, 1[$ et on note $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble de ses classes d'équivalence (attention, I n'est pas dénombrable). D'après l'axiome du choix, il existe une application f de I dans $[0, 1[$ telle que, pour tout $i \in I$, $f(i) \in A_i$ (le fait que I soit non dénombrable implique que l'on ne peut démontrer l'existence d'une telle application, il faut donc le poser comme axiome). Posons $B = f(I)$. Soit r une bijection de \mathbb{N} sur $\mathbb{Q} \cap]-1, 1[$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = B + r(n)$. Alors, les ensembles $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $[0, 1[\subset \cup_n B_n \subset]-1, 2[$. Supposons que $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(B_n) = \lambda(B)$. On obtient alors

$$1 = \lambda([0, 1[) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(B) \leq \lambda(]-1, 2[) = 3.$$

La première inégalité interdit $\lambda(B) = 0$ tandis que la seconde interdit $\lambda(B) > 0$. Ainsi B ne peut être borélien.

Références

[BP04] M. BRIANE, G. PAGÈS – *Théorie de l'intégration*, Vuibert.