

Intégration et probabilités - Corrigé du DM 2

Exercice 1.

1. La fonction f étant mesurable sur (E, \mathcal{A}) et t étant mesurable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, la fonction $(x, t) \mapsto f(x) - t$ est mesurable sur $(E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. La préimage de $[0, +\infty[$, A , est donc un élément de la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

2. Calculons $\mu \otimes \lambda(A) = \int \mathbf{1}_A \mu(dx) \lambda(dt)$. En appliquant le théorème de Tonelli, on obtient d'un côté

$$\mu \otimes \lambda(A) = \int_E \left(\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{A \cup \{x\} \times \mathbb{R}_+} \lambda(dt) \right) \mu(dx) = \int_E \lambda([0, f(x)]) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu(dx)$$

et d'un autre côté

$$\mu \otimes \lambda(A) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_E \mathbf{1}_{A \cup E \times \{t\}} \mu(dx) \right) \lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\}) \lambda(dt).$$

3. En appliquant cette formule à la fonction g^p on obtient

$$\int_E g^p d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{g^p \geq t\}) \lambda(dt).$$

La transformation φ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ qui envoie u sur u^p est un difféomorphisme \mathcal{C}^1 . En faisant le changement de variable $t = \varphi(u)$ dans le second membre de l'égalité, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{g^p \geq t\}) \lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{g^p \geq u^p\}) p u^{p-1} \lambda(du) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{g \geq u\}) p u^{p-1} \lambda(du).$$

4. Soit φ une fonction strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 s'annulant en 0. La formule montrée en 1. donne

$$\int_E \varphi \circ f d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{\varphi \circ f \geq t\}) \lambda(dt).$$

Les propriétés de φ assurent que c'est un difféomorphisme \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . En faisant le changement de variable $t = \varphi(u)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{\varphi \circ f \geq t\}) \lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{\varphi \circ f \geq \varphi(u)\}) \varphi'(u) \lambda(du) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq u\}) \varphi'(u) \lambda(du)$$

car φ est croissante.

5. On procède de la même manière qu'en 1. Appliquons le théorème de Tonelli à l'intégrale

$$\int_{E \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} F \mu(dx) \lambda(ds) \lambda(dt).$$

D'un côté cette intégrale est égale à

$$\int_E \left(\int_{\{x\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} F \lambda(ds) \lambda(dt) \right) \mu(dx) = \int_E \left(\int_{\{x\} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0, f(x)]}(s) \mathbf{1}_{[0, g(x)]}(t) \lambda(ds) \lambda(dt) \right) \mu(dx)$$

$$= \int_E f(x)g(x)\mu(dx).$$

D'un autre côté elle est égale à

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \left(\int_{E \times \{s,t\}} F \mu(dx) \right) \lambda(ds)\lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq s\} \cap \{g \geq s\})\lambda(ds)\lambda(dt)$$

Exercice 2.

1. φ est une application \mathcal{C}^1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ à valeur dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. L'application $\phi(u, v) = (uv, u(1-v))$ est un inverse \mathcal{C}^1 pour φ . C'est donc un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

2.
 (update=yes) pt 1:(0,0) 2:(0,100) 3:(0,-100) 4:(100,0) 5:(-100,0)
 6:(-20,-20) 12:(-20,-40) 13:(-20,-60) 14:(-20,-80) 9:(-20,-100) 15:(-40,-20) 16:(-60,-20) 17:(-80,-20) 18:(-30,-20) 19:(-20,-30) 20:(-40,-100) 21:(-100,-60) 10:(-100,-20) 100:(100,-20) 101:(-20,100)
 7:(0,20) 50:(0,40) 51:(0,60) 52:(0,80)
 60:(40,0) 61:(80,0) 62:(100,10) 63:(100,30) 64:(100,50)
 8:(20,0) 11:(20,20) 71:(7,0) 72:(7,20) 73:(14,0) 74:(14,20) 75:(20,7) 76:(0,7) 77:(20,14) 78:(0,14)
 102:(-100,20) 103:(100,20) 104:(20,100) 105:(20,-100)
 Fig1.ps [2,3] [4,5] (width=2)(dash=8) (-100 100, 100 -100) (width=) (dash=) (color=) [6,9] [6,10]
 [6,19,18,12,15,13,16,14,17,9,10,20,21] (dash=5) [10,100] [9,101] (dash=) (color=) [1,2] [1,4] [7,60] [50,61]
 [51,62] [52,63] [2,64]
 (color=) [1,7] [1,8] [11,7] [11,8] [71,72] [73,74] [75,76] [77,78] (dash=5) [102,103] [104,105] (dash=)

φ

CE Fig1.ps +7: (1) +8: (1) 100:(130,0) [100] \longrightarrow
 (update=yes) pt 1:(0,0) 2:(0,100) 3:(0,-100) 4:(100,0) 5:(-100,0)
 10:(-200,2) 11:(-100,4) 12:(-80,5) 13:(-40,10) 14:(-20,20) 15:(-10,40) 16:(-5,80) 17:(-4,100) 18:(-2,200)
 9:(-20,-100) 19:(-60,7)
 20:(-200,18) 21:(-100,16) 22:(-80,15) 23:(-40,10) 24:(-20,0) 25:(-10,-20) 26:(-5,-60) 27:(-4,-80) 28:(-2,-180) 29:(-60,13)
 7:(0,20) 50:(40,0) 51:(60,0) 52:(80,0) 6:(20,0) 60:(20,20) 61:(40,20) 62:(60,20) 63:(80,20) 64:(100,20)
 30:(200,2) 31:(100,4) 32:(80,5) 33:(60,7) 34:(40,10) 35:(20,20) 36:(10,40) 37:(5,80) 38:(4,100) 39:(-2,200) 9:(-20,-100) 19:(-60,7)
 40:(200,18) 41:(100,16) 42:(80,15) 43:(60,13) 44:(40,10) 45:(20,0) 46:(10,-20) 47:(5,-60) 48:(4,-80)
 49:(2,-180)
 70:(0,0) 71:(20,0) 72:(0,20) 73:(20,20)
 74:(7,0) 75:(13,0) 84:(7,20) 85:(13,20)
 76:(0,7) 77:(0,13) 86:(30,7) 87:(30,13)
 Fig2.ps [2,3] [4,5] (width=2)(dash=8) (0 100, 0 -100) (width=) (dash=)
 (color=) [10,11,12,13,14] [20,21,22,23,24] [21,11,21,12,22,19,29,13,23]
 (dash=5) [12,13,14,15,16,17,18] [22,23,24,25,26,27,28]
 (dash=) (color=) [1,4] [7,64] [1,60] [6,61] [50,62] [51,63] [52,64]
 (color=) [33,34,35,36] [43,44,45,46] [70,71] [70,72] [72,73] [71,73]
 [74,84] [75,85] [76,86] [77,87] [86,87]
 (dash=5) [34,35,36,37,38,39] [30,31,32,33,34,35] [44,45,46,47,48,49] [40,41,42,43,44,45]
 Ø Fig2.ps +7: (1) +8: (1)

3. La fonction f est continue sur $]0, 1[$, les problèmes d'intégrabilité ne peuvent se présenter qu'au bornes du segment. En 0 f est équivalente à v^{a-1} qui est intégrable car a est strictement positif. De

même, en 1 f est équivalente à $(1 - v)^{b-1}$ qui est aussi intégrable. La fonction f est bien Lebesgue intégrable sur $]0, 1[$.

4. φ est un difféomorphisme \mathcal{C}^1 de $]0, +\infty[^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Le changement de variable dans l'intégrale donne

$$\int_{]0, +\infty[^2} e^{-x-y} x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \int_{]0, +\infty[\times]0, 1[} e^{-u} (uv)^{a-1} (u(1-v))^{b-1} \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

D'après le théorème de Tonelli, cette intégrale est encore égale à

$$\int_{]0, +\infty[} e^{-u} u^{a+b-1} du \int_{]0, 1[} v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv = \Gamma(a+b) \nu(\mathbb{R}).$$

En appliquant directement le théorème de Tonelli à la première intégrale on a

$$\int_{]0, +\infty[^2} e^{-x-y} x^{a-1} y^{b-1} dx dy = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

d'où

$$\nu(\mathbb{R}) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Exercice 3.

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle (v.a.r.) X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathbb{P}_X(dx).$$

Soient $X_0, \dots, X_k, k+1$ v.a.r. La fonction caractéristique de leur somme est $\mathbb{E}\left(e^{it \sum_{\ell=0}^k X_{\ell}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{\ell=0}^k e^{itX_{\ell}}\right)$.

Lorsqu'elles sont indépendantes $\mathbb{E}\left(\prod_{\ell=0}^k e^{itX_{\ell}}\right) = \prod_{\ell=0}^k \mathbb{E}\left(e^{itX_{\ell}}\right)$. Enfin, si elles ont même loi, $\prod_{\ell=0}^k \mathbb{E}\left(e^{itX_{\ell}}\right) = (\varphi_{X_1})^{k+1}$.

Calculons la fonction caractéristique de la somme aléatoire Y :

$$\mathbb{E}\left(e^{itY}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n e^{itY} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left(e^{it \sum_{\ell=0}^k X_{\ell}} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right).$$

La variable N étant indépendante des X_i ,

$$\mathbb{E}\left(e^{it \sum_{\ell=0}^k X_{\ell}} \mathbf{1}_{\{N=k\}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{it \sum_{\ell=0}^k X_{\ell}}\right) \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{N=k\}}\right) = (\varphi_{X_1})^{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit $\mathbb{E}(e^{itY}) = \varphi_{X_1}(t) (p\varphi_{X_1}(t) + 1 - p)^n$.

Exercice 4.

1. On a $\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}(\{X \geq t\} \cap \{Y \geq t\})$. Comme ces variables sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}(\{X \geq t\})\mathbb{P}(\{Y \geq t\}) = e^{-(\lambda+\mu)t} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

On en déduit que la fonction de répartition de Z est $(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ et que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Calculons $\mathbb{P}(Z = X) = \mathbb{P}(Y \geq X) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{y \geq x\}} \mathbb{P}_{(X,Y)}(dx, dy)$. Les variables étant indépendantes, cette intégrale est égale à $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{y \geq x\}} \mathbb{P}_X(dx) \otimes \mathbb{P}_Y(dy)$. D'après le théorème de Tonelli, cette intégrale est égale à

$$\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty e^{-\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

3. Pour montrer l'indépendance, il suffit de vérifier que

$$\mathbb{P}(Z \subset A \text{ et } \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) = \mathbb{P}(Z \subset A) \mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1)$$

pour tout borélien A de \mathbb{R} . En effet cette égalité implique la même formule pour $\mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 0$. D'un côté

$$\mathbb{P}(Z \subset A \text{ et } \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) = \mathbb{P}(Y \geq X \text{ et } X \subset A) = \int_A \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} dx,$$

d'un autre côté

$$\mathbb{P}(Z \subset A) = \mathbb{P}(Y \geq X \text{ et } X \subset A) + \mathbb{P}(X \geq Y \text{ et } Y \subset A) = (\lambda + \mu) \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} dx$$

et le calcul de la question 2. donne $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, les deux variables aléatoires sont bien indépendantes.

Exercice 5.

1. Vérifions que $u(sx)$ satisfait aux hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (thm 5.4.1 du résumé de cours) :

(i)(ii) la fonction $u(sx)$ est une fonction continue des deux variables,

(iii) $u \leq 1$ qui est une fonction $\mathbb{P}_X(dx)$ -intégrable sur \mathbb{R} .

La fonction $\theta(s)$ est donc continue sur $[0, +\infty[$.

Pour montrer sa dérivabilité, appliquons le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (thm 5.4.2 *loc. cit.*) pour le paramètre dans un intervalle $[s_0, +\infty[$:

(i) pour tout x , $s \mapsto u(sx)$ est dérivable et continue ,

(ii) pour tout s , $x \mapsto u(sx)$ est positive majorée par une fonction $\mathbb{P}_X(dx)$ -intégrable,

(iii) pour tout $s \in [s_0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} u(sx) \right| = \frac{|x|}{(1 + s|x|)^2} \leq \frac{1}{s_0} \mathbf{1}_{\{|x|>1\}} + \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}.$$

Cette dernière étant $\mathbb{P}_X(dx)$ -intégrable sur \mathbb{R} , θ est dérivable sur $[s_0, +\infty[$ de dérivée $\mathbb{E} \left(-|X|(u(sX))^2 \right)$ continue. Ceci étant vrai pour tout s_0 strictement positif, θ est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$

La famille $\{x \mapsto u(sx)\}_{s \in \mathbb{R}_+}$ étant majorée indépendamment de s par la fonction $\mathbb{P}_X(dx)$ -intégrable 1, le théorème de convergence dominée donne

$$\theta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{0\}} \mathbb{P}_X(dx) = \mathbb{P}_X(\{0\}).$$

2. Notons $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, l'espace probabilisé portant la v.a.r. U . Déterminons la lois de X . Soit $A \subset]0, +\infty[$ un borélien de \mathbb{R} ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{U - c \in A\}) = \mathbb{P}(\{U \in c + (A \cap [0, 1 - c])\}) = \lambda(A \cap [0, 1 - c])$$

La mesure d'un sous-ensemble de $] - \infty, 0[$ est nulle. Enfin $\mathbb{P}_X(\{0\}) = \mathbb{P}(U \leq c) = c$. La lois de X est donc $c\delta_0(dx) + \mathbf{1}_{[0, 1-c]}\lambda(dx)$. On a alors

$$\theta(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + s|x|} (c\delta_0(dx) + \mathbf{1}_{[0, 1-c]}\lambda(dx)) = c + \frac{1}{s} \ln(1 + s(1 - c)) \text{ et } \theta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} c.$$