

Équations de Hamilton-Jacobi et inégalités entropiques généralisées

Gentil Ivan, Malrieu Florent,

Laboratoire de statistique et probabilités, UMR CNRS C5583, Université Paul-Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France
Courriel : {gentil, malrieu}@cict.fr
<http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/{Gentil, Malrieu}/>

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous prouvons l'équivalence entre des inégalités de Sobolev logarithmiques généralisées et l'hypercontractivité de certaines équations de Hamilton-Jacobi et retrouvons sous l'une des deux hypothèses une inégalité de transport établie dans [5]. Ces résultats généralisent ceux de [3]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Hamilton-Jacobi Equations and inequalities for generalised entropies

Abstract. We prove the equivalence between a general logarithmic Sobolev inequality and the hypercontractivity of an Hamilton-Jacobi equation. We also recover that those properties imply a transportation inequality established by [5]. These results provide a natural generalisation work performed in [3]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et définitions

L'étude du comportement en temps long de l'équation de McKean-Vlasov :

$$\partial_t u = \nabla \cdot [u \nabla (\log u + V)],$$

où V est strictement convexe à l'infini et $\int \exp(-V) = 1$, repose sur l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante : pour toute densité de probabilité f ,

$$\int f \log f + \int f V \leq \mathcal{L} \int f |\nabla (\log f + V)|^2. \quad (1)$$

D'après [3], l'existence d'une telle inégalité est équivalente à une propriété d'hypercontractivité dans les espaces $L^p(e^{-V})$ pour le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ défini comme la solution fondamentale de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t \mathbf{Q}_t g(x) + \frac{1}{2} |\nabla \mathbf{Q}_t g(x)|^2 = 0 \quad \text{pour tous } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n,$$

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Gentil I., Malrieu F.

avec pour condition initiale g lipschitzienne bornée. Cette reformulation fournit en particulier le fait que l'inégalité de Sobolev logarithmique implique l'inégalité de transport suivante : pour toute densité de probabilité par rapport à la mesure e^{-V} ,

$$W_2(fe^{-V}, e^{-V}) = \inf \left\{ \int \frac{|x-y|^2}{2} d\pi(x, y) \right\} \leq \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}} \left(\int f \log f + \int fV \right)},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de marges fe^{-V} et e^{-V} .

Notre but est ici de montrer que ces relations sont encore vraies dans un cadre très général. Introduisons tout d'abord quelques notations :

– la fonction U désigne une fonction sur \mathbb{R}^+ , vérifiant les hypothèses techniques suivantes :

- * U est \mathcal{C}^4 sur \mathbb{R}^+ , $U(0) = 0$, strictement convexe,
- * $\lim_{x \rightarrow \infty} U(x)/x = \infty$,
- * $\lambda \mapsto \lambda^n U(\lambda^{-n})$ est convexe croissante sur \mathbb{R}^+ .

Les exemples les plus importants sont les fonctions $x \mapsto x \log x$ ou $x \mapsto x^m$ pour $m > 1$.

- la fonction V est strictement convexe à l'infini,
- la fonction W est convexe et paire,
- la fonction C désigne la puissance p de la norme p (normalisée) de \mathbb{R}^n : $C(x) = |x|_p^p/p := \sum x_i^p/p$ pour $p > 1$. Sa transformée de Legendre est donnée par $C^*(x) = |x|_q^q/q$, avec $1/p + 1/q = 1$.

Pour fixer les idées, l'étude des inégalités que nous développons dans la suite sont liées à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot [\rho \nabla C^*(U'(\rho) + V + W * \rho)].$$

DÉFINITION 1.1. – Soit ρ une densité de probabilité par rapport à la mesure de LEBESGUE sur \mathbb{R}^n . Définissons l'énergie libre de ρ , encore appelée entropie par abus de langage,

$$H(\rho) := \int U(\rho)(x) dx + \int \rho(x)V(x) dx + \frac{1}{2} \iint W(x-y)\rho(x)\rho(y) dx dy,$$

l'entropie relative de ρ_1 par rapport à ρ_2 , $H(\rho_1|\rho_2) := H(\rho_1) - H(\rho_2)$, et la dissipation d'entropie

$$I(\rho) := \int \{\nabla(U'(\rho) + V + W * \rho) \cdot \nabla C^*(U'(\rho) + V + W * \rho)\} \rho dx.$$

D'après les hypothèses faites sur les fonctions U, V, W il existe une unique densité de probabilité ρ_∞ qui minimise la fonctionnelle H , voir [5].

DÉFINITION 1.2. – Nous dirons que le système satisfait à une inégalité de SOBOLEV logarithmique généralisée (ISL)(\mathcal{L}), si pour toute fonction ρ , densité de probabilité par rapport à la mesure de LEBESGUE,

$$H(\rho|\rho_\infty) \leq \mathcal{L} I(\rho). \tag{ISL}(\mathcal{L})$$

Remarque 1. – L'appellation « inégalité de Sobolev logarithmique » provient de l'exemple fondamental $U(s) = s \log s$ présenté en (1).

Équations de Hamilton-Jacobi et inégalités entropiques généralisées

2. Hypercontractivité des équations de Hamilton-Jacobi

Définissons le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ de Hopf-Lax associé à la fonction de coût C : pour toute fonction g lipschitzienne bornée, $\mathbf{Q}_0 g = g$ et pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{Q}_t g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + t C \left(\frac{x-y}{t} \right) \right\}.$$

La fonction $\mathbf{Q}_t g$ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t u(t, x) + C^*(\nabla u(t, x)) = 0 \quad \text{pour tous } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n,$$

avec condition initiale $u(0, \cdot) = g(\cdot)$ (voir [2]).

DÉFINITION 2.1. – Soit h une fonction sur \mathbb{R}^n , bornée lipschitzienne. Définissons

$$K(h) = \sup \left\{ \int \rho(x) h(x) dx - H(\rho | \rho_\infty) ; \rho \text{ densité de probabilité} \right\}$$

Le résultat principal relie l'existence d'une inégalité de Sobolev logarithmique (généralisée) aux variations de la fonction définie sur \mathbb{R}^+ , pour toute fonction g , par

$$F_a(t) = \frac{K \left(\left(a + \frac{t}{\mathcal{L}^p} \right)^{p/q} \mathbf{Q}_t g \right)}{\left(a + \frac{t}{\mathcal{L}^p} \right)^{p/q}}.$$

THÉORÈME 2.2. – Supposons que U, V, W vérifient les hypothèses données dans l'introduction.

Si que le système satisfait à (ISL)(\mathcal{L}), alors, pour toute fonction bornée lipschitzienne g pour tout $a \geq 0$ et $t \geq 0$, on a $F_a(t) \leq F_a(0)$.

Inversement, s'il existe $a > 0$ tel que $F_a(t) \leq F_a(0)$ est satisfait pour toute fonction g bornée lipschitzienne et $t > 0$ alors le système satisfait à (ISL)(\mathcal{L}).

Pour démontrer ce théorème nous utilisons les deux lemmes suivants.

LEMME 2.3. – Soit h une fonction bornée lipschitzienne sur \mathbb{R}^n alors

$$K(h) = \int \rho \left(U'(\rho) + \frac{1}{2} W * \rho \right) - \int U(\rho) + H(\rho_\infty),$$

où la densité de probabilité ρ est solution de $h = U'(\rho) + V + W * \rho$.

LEMME 2.4. – Soit h_t une fonction \mathcal{C}^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in I$ on a

$$\frac{d}{dt} K(h_t) = \int \left(\frac{d}{dt} h_t \right) \rho_t,$$

où ρ_t satisfait, pour tout $t \in I$, $h_t = U'(\rho_t) + V + W * \rho_t$.

Preuve du théorème 2.2

◀ Soit g une fonction bornée lipschitzienne sur \mathbb{R}^n . Notons

$$\gamma(t) = \frac{K(\beta(t) \mathbf{Q}_t g)}{\beta(t)},$$

où $\beta(t) = \left(a + \frac{t}{\mathcal{L}^p} \right)^{p/q}$. Nous obtenons, en utilisant le lemme 2.4,

$$\beta^2(t) \gamma'(t) = \beta'(t) \int \beta(t) \mathbf{Q}_t g \rho_t - \frac{\beta(t)^{2-q}}{q} \int |\nabla(\beta(t) \mathbf{Q}_t g)|_q^q \rho_t - \beta'(t) K(\beta(t) \mathbf{Q}_t g).$$

Gentil I., Malrieu F.

La relation $\beta(t)^{2-q} = \mathcal{L}q\beta'(t)$, la définition de ρ_t et l'inégalité (ISL)(\mathcal{L}) fournissent l'inégalité hypercontractive $F_a(t) \leq F_a(0)$.

Prouvons maintenant la réciproque. La relation $F_a(t) \leq F_a(0)$, quand $t \rightarrow 0$, implique $\gamma'(0) \geq 0$. Comme $\mathbf{Q}_0g = g$ et $\rho_0 = \rho_\infty$, le système satisfait (ISL)(\mathcal{L}). ►

3. Application aux inégalités de transport

DÉFINITION 3.1. – Nous dirons que le système satisfait à une inégalité de transport (IT)(\mathcal{J}) si pour toute densité de probabilité ρ sur \mathbb{R}^n ,

$$W_C(\rho, \rho_\infty) = \inf \left\{ \int C(x-y) d\pi(x,y) \right\} \leq \mathcal{J}H(\rho, \rho_\infty), \quad (\text{IT})(\mathcal{J})$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des mesures π sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de marges ρ et ρ_∞ .

La proposition suivante donne une définition équivalente de l'inégalité de transport faisant intervenir le semi-groupe $(\mathbf{Q}_t)_{t \geq 0}$ et permet de faire le lien entre les inégalités (ISL)(\mathcal{L}) et (IT)(\mathcal{J}).

PROPOSITION 3.2. – Le système satisfait à (IT)(\mathcal{J}) si et seulement si pour toute fonction bornée lipschitzienne g , on a

$$K \left(\frac{1}{\mathcal{J}} \left(\mathbf{Q}_1g - \int g\rho_\infty \right) \right) \leq 0. \quad (2)$$

Preuve

◀ Pour démontrer cette proposition nous utilisons la définition de la fonction K et le théorème de Kantorovich-Rubinstein, voir [1] chapitre 8. ►

La correspondance entre (ISL)(\mathcal{L}) et la propriété d'hypercontractivité de l'équation d'Hamilton-Jacobi permet de retrouver immédiatement un résultat établi dans [4].

Corollaire 3.3 (Cordero-Erausquin, Gangbo, Houdré) *Supposons que U, V, W vérifient les hypothèses données dans l'introduction.*

Si le système satisfait à une inégalité (ISL)(\mathcal{L}), alors il satisfait aussi à une inégalité de transport de constante $(\mathcal{L}p)^{p/q}$.

Preuve

◀ L'inégalité $F_a(t) \leq F_a(0)$, appliquée à $a = 0$ et $t = 1$ donne l'inégalité (2). ►

Remarque 2. – Les résultats présentés ici n'assurent en rien l'existence d'une de ces inégalités. Par exemple lorsque $U(s) = s \log s$, $W = 0$ et $C(x) = |x|_p^p/p$ avec $1 < p < 2$, l'inégalité (ISL)(\mathcal{L}) est fautive quelle que soit la fonction V considérée !

Remerciements. Nous tenons à remercier Cédric Villani pour les différentes discussions sur le sujet.

Références bibliographiques

- [1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, Panoramas et Synthèses **10**, Société Mathématique de France, Paris, 2000.
- [2] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [3] S. G. Bobkov, I. Gentil, M. Ledoux, *Hypercontractivity of Hamilton-Jacobi equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 7, 669–696.
- [4] D. Cordero-Erausquin, W. Gangbo, C. Houdré, *Inequalities for generalized entropy and optimal transportation*, 2002, prépublication.
- [5] J. A. Carrillo, R. J. McCann, C. Villani, *Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates*, 2002, À paraître dans Rev. Mat. Iberoamericana.