

---

## TP d'évaluation – File d'attente M/M/1

---

Ce TP est à faire par groupes de deux. Vous rendrez des notes manuscrites dans la boîte aux lettres de B. Delyon au quatrième étage gauche et enverrez vos fonctions Scilab en **UN SEUL FICHER** par courrier électronique à [bernard.delyon@univ-rennes1.fr](mailto:bernard.delyon@univ-rennes1.fr) avant le ????

### 1 Introduction culturelle

Les files d'attente apparaissent naturellement dans beaucoup de situations : un guichet desservant des usagers, une piste d'aéroport sur laquelle des avions atterrissent, un serveur informatique répondant à des requêtes.

Les clients arrivent à des temps aléatoires et attendent leur tour devant le (ou les) guichet(s). Le serveur met un temps aléatoire pour servir chaque client. La file a une capacité d'accueil éventuellement limitée. Une file d'attente est donc déterminée par les quatre paramètres suivants : A/B/s/K où

- A indique la loi des temps inter-arrivées des clients,
- B indique la loi des temps de service,
- s indique le nombre de serveurs,
- K indique la capacité maximale de la salle d'attente ( $+\infty$  si non précisé).

Voici quelques codes utilisés pour A et B :

- M pour la loi exponentielle (*memoryless*),
- U pour la loi uniforme,
- D pour une mesure de Dirac (*deterministic*),
- G pour une loi quelconque (*general*).

### 2 Définition et premières propriétés des files M/M/1

L'objet de ce TP est d'étudier les files M/M/1. On suppose que les instants d'arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus d'arrivée) et suivent la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . On note  $(X_t)_{t \geq 0}$  le processus qui compte le nombre de personnes dans le système. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est constant par morceaux (comme le processus de Poisson). On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des temps intersauts,  $(T_n)_{n \geq 0}$  (avec  $T_0 = 0$ ) la suite des sauts. On a donc en particulier pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} = T_n + S_n$ .

Les deux propositions suivantes sont capitales pour comprendre la dynamique de  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

**Proposition 1 (Absence de mémoire de la loi exponentielle).** *Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  alors pour tous  $s, t$  réels positifs,*

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

**Proposition 2 (Minimum de deux v.a. indépendantes de lois exponentielles).** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. indépendantes de lois respectives  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $\mathcal{E}(\mu)$  alors  $V = \min(X, Y)$  et  $W = \mathbf{1}_{\{V=X\}}$  sont indépendantes de lois respectives  $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$  et  $\mathcal{B}(\lambda/(\lambda + \mu))$ .*

On déduit de ce qui précède les points suivants :

1. si  $X_{T_n} = 0$ , alors  $S_n$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $X_{T_{n+1}} = 1$ ,
2. si  $X_{T_n} = k > 0$ , alors  $S_n$  suit la loi  $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$  et  $X_{T_{n+1}} = X_{T_n} + Y_n$  où la loi de  $Y_n$  est donnée par  $\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

3. les v.a.  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont indépendantes.

On peut alors en déduire une façon de représenter  $(X_t)_{t \geq 0}$  qui sera très utile pour la simulation.

**Proposition 3 (Représentation d’une file M/M/1).** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites v.a. i.i.d. de lois respectives uniforme sur  $[0, 1]$  et exponentielle de paramètre 1. On définit par récurrence  $(S_n)_{n \geq 1}$  et  $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante :

1.  $T_0 = 0$  et  $X_0 = 0$ ,

2. en notant  $\alpha_n = \lambda + \mu \mathbf{1}_{\{X_{T_n} > 0\}}$ , on pose  $S_n = V_n / \alpha_n$  et  $X_{T_{n+1}} = X_{T_n} + 2 * \mathbf{1}_{\{U_n < \lambda / \alpha_n\}} - 1$ .

Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ , défini par  $X_t = X_{T_n}$  pour tout  $T_n \leq t < T_{n+1}$ , est une file M/M/1.

Voici une fonction Scilab qui permet de simuler une trajectoire de la file M/M/1 prenant comme paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et l’instant final  $t$ . Elle donne aussi en sortie la matrice des temps de saut et des positions<sup>1</sup>.

```
//TRAJECTOIRE D’UNE FILE D’ATTENTE DE TYPE M/M/1
```

```
function a=MM1(1,m,t)
N=[0];
T=[0];
while (T($)<t)
    b=1/(1+m*(N($)>0));
    T=[T T($)+grand(1,1,"exp",b)];
    N=[N N($)+2*(rand(1,1)<1*b)-1];
end;
T($)=[];
N($)=[];
a=[T;N];
xbasec();plot2d2([T t],[N N($)+1],3);
endfunction;
```

►► Remarquer que  $(X_t)_{t \geq 0}$  semble avoir trois comportements différents selon que

1.  $\lambda < \mu$ ,
2.  $\lambda = \mu$  et
3.  $\lambda > \mu^2$ .

### 3 Cas transient

On suppose ici que  $\lambda > \mu$ .

►► Déterminer grâce à la simulation l’expression de la limite  $a(\lambda, \mu)$  de  $X_t/t$  quand  $t$  tend vers l’infini en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ . Écrire une fonction qui prend en paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $t$ , trace la trajectoire  $t \mapsto X_t/t$  et sa limite  $a(\lambda, \mu)$ .

►► Écrire une fonction **quasigauss** qui illustre le fait que, pour  $t$  grand, la loi de  $Y_t = \sqrt{t}(X_t/t - a(\lambda, \mu))$  est quasiment gaussienne<sup>3</sup>. Peut-on grâce à la simulation se faire une idée de l’expression de sa variance asymptotique  $\sigma^2(\lambda, \mu)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  ?

<sup>1</sup>Deux remarques Scilab. Les v.a. exponentielles  $\mathcal{E}(\lambda)$  sont paramétrées par Scilab par leur espérance  $1/\lambda$  et non par  $\lambda$ . Pour un vecteur  $A$ ,  $A(\$)$  désigne la dernière coordonnée,  $A(\$ - 1)$  l’avant dernière... C’est pratique quand on ne connaît pas la taille de  $A$ .

<sup>2</sup>On pourra faire l’analogie avec la marche aléatoire  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{N}$  définie par :  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 | Z_n = 0) = 1$  et, pour  $k \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1 | Z_n = k) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k - 1 | Z_n = k) = p$  qui présente les trois comportements selon la position de  $p$  par rapport à  $1/2$ .

<sup>3</sup>Il faudra simuler un certain nombre de v.a. i.i.d. de même loi que  $Y_t$ , en déduire une estimation  $\hat{\sigma}^2$  de la variance de  $Y_t$  puis comparer l’histogramme de l’échantillon à la densité de la loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, \hat{\sigma}^2)$ .

## 4 Cas récurrent positif

On se place à présent dans le cas où  $\lambda < \mu$ .

### 4.1 Étude du comportement asymptotique de la file

►► Écrire une fonction **comp** qui prend en paramètres  $\lambda, \mu, t$  et un entier  $p$ , génère  $p$  réalisations indépendantes de  $X_t$  puis compare la fonction de répartition empirique de cet échantillon à celle de la mesure  $\pi$  sur  $\mathbb{N}$  définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi(k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

*Remarque 4.* On souhaite utiliser le test d'adéquation du  $\chi^2$  pour illustrer le fait que la loi de  $X_t$  converge vers  $\pi$  quand  $t$  tend vers l'infini. Comme la loi de  $X_t$  est portée par  $\mathbb{N}$  tout entier, il faut adapter un peu la méthode. L'idée est la suivante : on rassemble tous les entiers supérieurs ou égaux à un certain  $k_0$  dans une même classe et on fait un test du  $\chi^2$  d'adéquation de la loi  $X_t \wedge k_0$  à la loi

$$(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(k_0 - 1), \pi([k_0, +\infty[)).$$

►► Écrire une fonction **test** qui prend en paramètres  $\lambda, \mu, t$  et un entier  $p$ , génère  $p$  réalisations indépendantes de  $X_t$ , fait le test décrit ci-dessus pour  $k_0 = 4$  au niveau  $\alpha = 0.05$ . Pour  $t$  grand, sur 1000 tentatives, combien de fois le test accepte  $H_0$  ?

►► Adapter la fonction précédente en une fonction **multitest** pour tracer sur même graphique, en fonction de  $t$ , la probabilité pour qu'un échantillon de taille  $p = 500$  passe le test<sup>4</sup>.

### 4.2 Processus de sortie des usagers

►► Écrire une fonction **sortie** qui génère une trajectoire de la file M/M/1 et trace la trajectoire du processus de sortie, c'est-à-dire le processus qui compte le nombre de personnes qui sont sorties du système. Que suggère cette simulation ? Comment pourrait-on, grâce à la simulation, étayer cette intuition ?

---

<sup>4</sup>On choisira quelques instants  $t_1, \dots, t_k$ . Puis, pour chaque temps  $t_l$ , on fera passer le test ci-dessus à un certain nombre de  $p$ -échantillon et on comptera combien on réussit le test. Cette fonction risque d'être un peu gourmande en temps de calcul...