Université de Rennes 1 Année 2004-05
Master de Mathématiques - Module H12

Statistique paramétrique - TD 7 - Corrigé succinct

Voici quelques remarques sur les exercices vus en TD. Pour le contrôle continu, le programme est :

1. exhaustivité, statistiques minimales et complètes,
2. estimateurs sans biais de variance minimum,
3. tests de Neyman-Pearson (hypothèse simple contre hypothèse simple),
4. tests unilatères dans un modèle exponentiel à rapport de densités monotone (comme dans les deux exos ci-dessous).

Exercice 1. *Test sur la moyenne pour une loi gaussienne*

1. Le rapport de vraisemblance s'écrit
$$\frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = \exp\left(S(\theta_1-\theta_0)-\theta_1^2+\theta_0^2\right).$$
Donc la région de rejet du test de Neyman-Pearson est de la forme
$$\{\exp\left(S(\theta_1-\theta_0)\right)>k\} \quad \text{ou} \quad \{S>k\} \quad \text{ou} \quad \left\{\sqrt{n}(S/n-\theta_0)>k\right\}.$$
2. Comme sous H_0 la variable aléatoire $\sqrt{n}(S/n-\theta_0)$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, le test de région de rejet $\{S/n>\theta_0+1.64/\sqrt{n}\}$ est de niveau 0.05.
3. Sous H_1, $\sqrt{n}(S/n-\theta_1)$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{H_1}(S/n>\theta_0+1.64/\sqrt{n}) &= \mathbb{P}_{H_1}(\sqrt{n}(S/n-\theta_1)>(\theta_0-\theta_1)\sqrt{n}+1.64)\\ &= 1-\mathbb{P}(Y\geq(\theta_1-\theta_0)\sqrt{n}+1.64).\end{aligned}$$
On peut alors obtenir un encadrement de la puissance grâce à l'encadrement suivant de la fonction de répartition gaussienne valable pour tout $r>0$:
$$\frac{e^{-r^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}\right)\leq\int_r^{+\infty}e^{-x^2/2}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\leq\frac{e^{-r^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r}.$$

Compléments : test unilatère. On veut à présent tester H_0 : « $\theta\leq\theta_0$ » contre H_1 : « $\theta>\theta_0$ »

Le modèle est une famille à rapport de densités (ou vraisemblances) monotones, c'est-à-dire qu'il existe une statistique U telle que pour tous $\theta'<\theta''$, les rapports $L(x,\theta'')/L(x,\theta')$ sont des fonctions strictement croissantes (ou décroissantes) de U.

En effet, pour tous $\theta'<\theta''$,
$$S\mapsto\frac{L(X,\theta'')}{L(X,\theta')}=\exp\left(S(\theta''-\theta')-\theta''^2+\theta'^2\right)$$
est croissante. D'après le théorème de Lehman, il existe donc un test UPP (uniformément plus puissant) de région de rejet de la forme $\{S\geq k\}$, où k est choisi pour que $\mathbb{P}_{\theta_0}(S\geq k)=\alpha$. Le choix de k est donc le même que dans le premier test. L'hypothèse de monotonie assure que pour tout θ dans Θ_0, le niveau est inférieur

ou égal à α (c'est en fait pour $\theta = \theta_0$ qu'il est le plus élevé) et le théorème de Lehman assure que parmi les tests qui vérifient cette propriété, le test considéré à la meilleure puissance pour tout θ dans Θ_1.

Exercice 2. *Détection d'un signal dans un canal bruité*
Notons $\theta_0 = \sigma^2$, $\theta_1 = \sigma^2 + \xi^2$ et $\Sigma = X_1^2 + \cdots + X_n^2$. Le rapport de vraisemblance s'écrit

$$\frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = \frac{\theta_0}{\theta_1} \exp\left((1/\theta_0 - 1/\theta_1)\Sigma/2\right).$$

Donc, puisque $\theta_0 < \theta_1$, la région de rejet du test de Neyman-Pearson est de la forme

$$\{\exp\left((1/\theta_0 - 1/\theta_1)\Sigma/2\right) > k\} \quad \text{ou} \quad \{\Sigma > k\} \quad \text{ou} \quad \{\Sigma/\theta_0 > k\}.$$

Sous H_0, Σ/θ_0 suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté. On peut donc déterminer grâce à Scilab la borne k(inversion de la fonction de répartition) et la puissance en utilisant que sous H_1, Σ/θ_1 suit un χ^2 à n degrés de liberté.
Compléments : test unilatère. On veut à présent tester H_0 : « $\theta \leq \theta_0$ » contre H_1 : « $\theta > \theta_0$ »

Le modèle est une famille à rapport de vraisemblances monotones.

En effet, pour tous $\theta' < \theta''$,

$$S \mapsto \frac{L(X,\theta'')}{L(X,\theta')} = \frac{\theta'}{\theta''} \exp\big((1/\theta' - 1/\theta'')\Sigma/2\big).$$

est croissante. D'après le théorème de Lehman, il existe donc un test UPP (uniformément plus puissant) de région de rejet de la forme $\{\Sigma \geq k\}$, où k est choisi pour que $\mathbb{P}_{\theta_0}(\Sigma \geq k) = \alpha$. Le choix de k est donc le même que dans le premier test.