

**Chapitre 6 : Equations différentielles du second ordre**

**L'équation sans second membre**

**Exercice 6.1.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

- (a)  $y'' - 8y' + 12y = 0$  ;  $y(0) = 0, y'(0) = 1$
- (b)  $y'' + 2y' + y = 0$  ;  $y(0) = 1, y'(0) = 0$
- (c)  $y'' - 4y' = 0$  ;  $y(0) = 1, y'(0) = 1$
- (d)  $y'' - 2y' + 5y = 0$  ;  $y(0) = 2, y'(0) = 4$
- (e)  $y'' + 4y = 0$  ;  $y(0) = 1, y'(0) = -1$

**L'équation avec second membre**

**Exercice 6.2.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes

- (a)  $y'' + 2y' + 10y = 10x + 1$  ;
- (b)  $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x - 3$  ;
- (c)  $y'' - 4y' = 8x$  ;
- (d)  $y'' + y = e^{2x}$
- (e)  $y'' + 9y = 5xe^{-x}$
- (f)  $y'' + 5y' = e^{-5x}$ .
- (g)  $y'' - 2y' + y = xe^x$

**Exercice 6.3.** (Extrait de l'examen du 09/12/2008.)

- (a) Trouver toutes les solutions de l'équation :  $y'' + 4y' + 5y = 1$ .
- (b) Pour chaque solution  $y(t)$  de cette équation déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .

**L'équation avec second membre et conditions initiales**

**Exercice 6.4.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.

- (a)  $y'' - 8y' + 12y = 4x$  ;  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  ;
- (b)  $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$  ;  $y(0) = 1, y'(0) = 4$  ;
- (c)  $y'' - 4y' + 5y = 10$  ;  $y(0) = -2, y'(0) = 2$  ;

**Superposition des solutions**

**Exercice 6.5.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a)  $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$
- (b)  $y'' - 10y' + 25y = \cosh(5x)$

## COMPLÉMENTS

### L'équation avec second membre exponentiel

**Exercice 6.6.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a)  $y'' + y' + y = e^{3x}$
- (b)  $y'' - 4y = e^{\alpha x}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$
- (c)  $y'' - 4y' + 4y = 2e^{3x} - 2e^{2x}$ . (Extrait de l'examen de rattrapage de 08/09.)

### L'équation avec second membre du type $P(x)e^{rx} \sin(ax)$ ou $P(x)e^{rx} \cos(ax)$

**Exercice 6.7.** Trouver les solutions des équations différentielles

- (a)  $y'' + y = \cos(2x)$
- (b)  $y'' + 3y' + y = \sin x$ .

**Exercice 6.8.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :

- (a)  $y' - 2y' + y = x \cos x$
- (b)  $y'' + y = x \sin x$
- (c)  $y'' - 2y = xe^{2x} \sin x$

**Exercice 6.9.** Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante :

- (a)  $y'' - 2y' + 10y = \sin(3x) + e^x$
- (b)  $y'' + y = e^{2x} + x \sin(x)$ .
- (c)  $y'' + y = 2x \cos x \cos(2x)$ .

### Recollement

**Exercice 6.10.** (Plus difficile) On considère l'équation différentielle (E) :  $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ .

- (a) Déterminer les solutions polynomiales de (E).
- (b) A l'aide du changement de fonction  $y = x^3u$  déterminer les solutions de (E) sur tout intervalle  $I$  ne contenant pas 0.
- (c) Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}$ .