

AN1 : Mathématiques  
« Devoir-Maison ».

**Exercice 1.** Calculer (si cette limite existe)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\ln(1+x)}}.$$

**Exercice 2.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$ .

1. Prouver que l'application  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $g(x) = f(x)/x$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ , est continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Prouver que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  et calculer sa dérivée.
3. Prouver l'existence d'un  $a \in ]0, 1[$  tel que  $g'(a) = 0$ .
4. Prouver que  $f'(a) = f(a)/a$  et donner en quelques mots une interprétation géométrique de ce résultat.

**Exercice 3.** Trouver une condition sur le couple d'entiers naturels  $(m, n)$ ,  $m > n$  équivalente au fait que l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $f(x) = x^m - x^n$ , soit paire.

Même question pour impaire, pour injective et pour surjective.

(On pourra essayer de dessiner le graphe de la fonction pour quelques couples  $(m, n)$  d'entiers afin de deviner la condition voulue.)