Université de Rennes 1 | MIEE L1
Année 2011-2012 | Module AN1

Examen terminal
Corrigé

Exercice 1.
On remarque tout d'abord que 0 est racine évidente. On pose $Q(z) = z^2 - (2+2i)z + 2i$. On a donc $P(z) = zQ(z)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z-(1+i))^2 - (1+i)^2 + 2i \\ &= (z-(1+i))^2. \end{aligned}$$

Le polynôme P admet donc pour racine simple 0 et double $1+i$.

Exercice 2.

1. On a
$$\frac{xe^x}{e^x+x} = \frac{xe^x}{e^x}\frac{1}{1+xe^{-x}} = x\frac{1}{1+xe^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$
car $xe^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$.
2. On a
$$\sqrt{x^2+2} - x = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
3. On a
$$\frac{\ln(1+3x)}{x} = 3\frac{\ln(1+3x)}{3x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 3.$$
On en déduit
$$\left(1+\frac{3}{u}\right)^u = e^{u\ln(1+3/u)} \xrightarrow[u\to+\infty]{} e^3.$$

Exercice 3.
Étude de la fonction
$$f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-1}.$$

1. La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que le dénominateur n'est pas nul. L'ensemble de définition D est donc $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$. De plus, pour tout $x \in D$, on a
$$f(-x) = \frac{-x^3-x}{x^2-1} = -f(x).$$
La fonction f est donc impaire.
2. On calcule la dérivée de f :
$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(x^2-1) - 2x(x^3+x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
Ainsi $f'(x)$ a le même signe que x^4-4x^2-1.

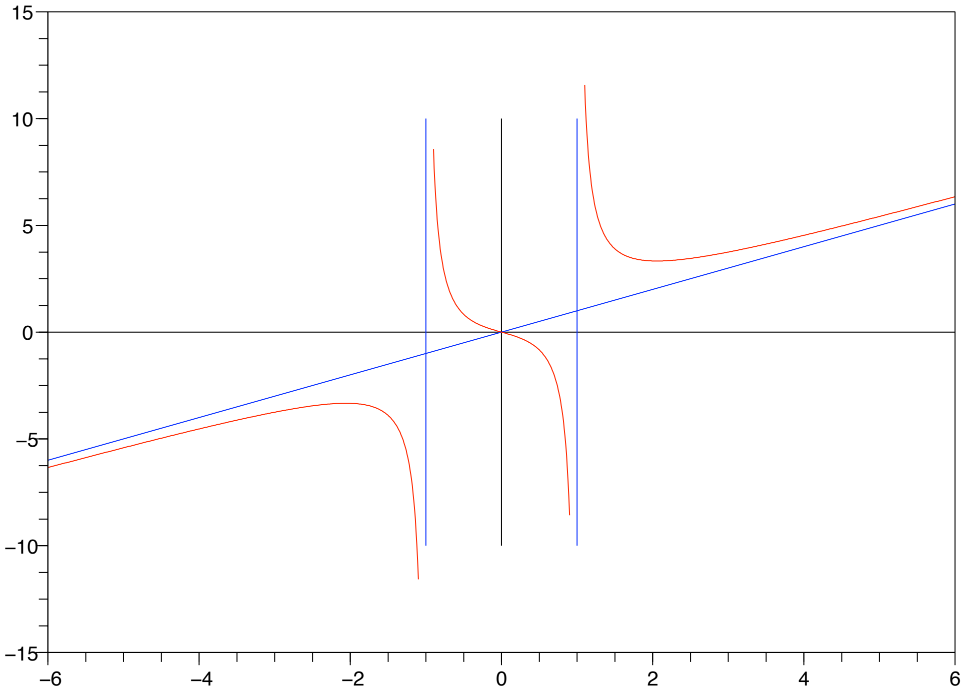

Figure 1 – Graphe de la fonction f.

3. Les racines du polynôme $P(u) = u^2 - 4u - 1$ sont $2 - \sqrt{5}$ et $2 + \sqrt{5}$. La première est strictement négative, la seconde strictement positive. On a donc

$$f'(x) = (x^2 - (2 - \sqrt{5}))(x^2 - (2 + \sqrt{5})) = (x^2 + \sqrt{5} - 2)(x - x_0)(x + x_0)$$

avec $x_0 = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Sur $[0 + \infty[$, la fonction f est donc décroissante sur $[0, 1[$ puis sur $]1, x_0]$ et croissante sur $[x_0, +\infty[$.

4. Le graphe de f admet deux asymptotes verticales d'équation $x = -1$ et $x = +1$. Étudions la situation en $+\infty$. On a

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad f(x) - x = \frac{2x}{x^2 - 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

La droite d'équation $y = x$ est donc asymptote au graphe de f en $+\infty$. Par symétrie, elle l'est aussi en $-\infty$.

5. Le graphe de f est donné par la figure 1.

6. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2x}{x^2 - 1} = x + \frac{2x}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}\, dx &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln |x^2 - 1| \right]_2^4 \\ &= (8 + \ln(15)) - (2 + \ln(3)) \\ &= 6 + \ln(5). \end{aligned}$$

Exercice 4.
La solution générale de l'équation sans second membre est donnée par

$$y(x) = c \exp\left(-\int \frac{x}{x^2+1}\,dx\right) = c \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}},$$

où c est une constante. On suppose à présent que c est une fonction (méthode de la variation de la constante) pour obtenir après simplification que

$$c'(x) = e^x.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$y(x) = \frac{e^x + c}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Pour que $y(0) = 0$ il faut que $c = -1$.

Exercice 5.
L'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = 0$ admet deux racines réelles distinctes -1 et 2. La solution générale de l'équation sans second membre est donc

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme d'un polynome de second ordre $P(x) = ax^2 + bx + c$. En remplaçant dans l'équation on obtient

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = -2ax^2 - 2(a+b)x + 2a - b - 2c = x^2.$$

Les coefficients a, b et c doivent vérifier les relations suivantes

$$\begin{cases} -2a = 1, \\ -2(a+b) = 0, \\ 2a - b - 2c = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c = -\frac{3}{4}.$$

La solution générale de l'équation avec second membre est donc

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Les conditions initiales impliquent que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - 3/4 = 2, \\ -c_1 + 2c_2 + 1/2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$c_1 = 2 \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{3}{4}.$$