

**Examen terminal**  
**4 janvier 2012**

L'épreuve dure deux heures. Les cinq exercices sont indépendants. Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Bon travail!!!

**Exercice 1.**

Déterminer les racines réelles ou complexes du polynôme

$$P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2iz.$$

**Exercice 2.**

Déterminer les limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x + x}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3x)}{x}$ . En déduire  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{u}\right)^u$ .

**Exercice 3.**

On considère la fraction rationnelle  $f$  suivante

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$  et sa parité.
2. Montrer que  $f'(x)$  a le même signe que  $x^4 - 4x^2 - 1$ .
3. En déduire les variations de  $f$ .
4. Déterminer les asymptotes du graphe de  $f$ .
5. Tracer le graphe de  $f$ .
6. Déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_2^4 \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx.$$

**Exercice 4.**

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + \frac{x}{x^2 + 1}y = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante pour déterminer les solutions de l'équation avec second membre.

**Exercice 5.**

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = x^2, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$