

**Contrôle continu 6**  
**Correction**

**Exercice 1.**

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' - 2y = (x + 1)e^x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme  $y(x) = Ke^{2x}$ .

**Méthode 1.** La méthode de la variation de la constante donne que  $K$  est solution de

$$K'(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Une intégration par parties donne

$$K(x) = -(x + 2)e^{-x} + c.$$

**Méthode 2.** On cherche une solution particulière de la forme  $(ax + b)e^x$ . On trouve  $a = -1$  et  $b = -2$ .

**Conclusion.** La solution générale de l'équation est  $y(x) = ce^{2x} - (x + 2)e^x$ . La condition  $y(0) = 3$  implique que  $c = 5$ .

**Exercice 2.**

Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} y' + \left(x - \frac{1}{x}\right)y = x^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1.

On cherche la solution de l'équation homogène. On a

$$\int \left(-x + \frac{1}{x}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + \ln(x) + c.$$

La solution de l'équation homogène est de la forme

$$y(x) = Kxe^{-x^2/2}.$$

D'autre part, le polynôme  $x \mapsto x$  est solution particulière de l'équation complète. La solution générale est donc de la forme

$$y(x) = Kxe^{-x^2/2} + x.$$

La condition initiale impose que  $K = \sqrt{e}$ .

**Exercice 3.**

Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4xe^{-x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

L'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 1 = 0$  admet 1 pour racine double. La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = (K_1x + K_2)e^x.$$

On cherche une solution particulière de l'équation complète de la forme  $y(x) = (ax+b)e^{-x}$ . On obtient les relations

$$\begin{cases} 4a = 4, \\ -4a + 4b = 0. \end{cases}$$

La fonction  $y(x) = (x+1)e^{-x}$  est solution. La solution générale de l'équation avec second membre est de la forme

$$y(x) = (x+1)e^{-x} + (K_1x + K_2)e^x.$$

Les conditions initiales imposent les relations suivantes :

$$\begin{cases} K_2 + 1 = 0, \\ K_1 + K_2 = 1. \end{cases}$$

La fonction cherchée est donc

$$y(x) = (x+1)e^{-x} + (2x-1)e^x.$$

#### Exercice 4.

1. Trouver une solution particulière de

$$y'' + 4y = 5e^x.$$

2. Trouver une solution particulière de

$$y'' + 4y = 4x.$$

3. Trouver la solution de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4x + 5e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

1. On remarque que  $y(x) = e^x$  est solution.
2. On remarque que  $y(x) = x$  est solution.
3. La solution générale de l'équation homogène est de la forme

$$y(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \sin(2x).$$

D'après le principe de superposition, la solution générale de l'équation avec second membre est de la forme

$$y(x) = K_1 \cos(2x) + K_2 \sin(2x) + x + e^x.$$

Les conditions initiales imposent les relations suivantes

$$\begin{cases} K_1 + 1 = 0, \\ 2K_2 + 2 = 1. \end{cases}$$

La fonction cherchée est donc

$$y(x) = -\cos(2x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + x + e^x.$$