Université de Rennes 1 MIEE L1
Année 2011-2012 Module AN1

Contrôle continu 5
Correction

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes par un changement de variables

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2 \cos(x)\, dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x^8 e^{x^9+1}\, dx$.

(i) On pose $u = \sin(x)$ (en prenant garde aux bornes) :

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^2 \cos(x)\, dx = \int_0^1 u^2\, du = \left[\frac{u^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(ii) On pose $u = x^9 + 1$:

$$\int_0^1 x^8 e^{x^9+1}\, dx = \frac{1}{9}\int_1^2 e^u\, du = \frac{1}{9}\left[e^u\right]_1^2 = \frac{e^2 - e}{9}.$$

Exercice 2.
Calculer l'intégrale suivante par parties :

(iii) $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\, dx$.

On pose

$$u'(x) = x \qquad v(x) = \ln(x)$$
$$u(x) = \frac{x^2}{2} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)\, dx &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\, dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \\ &= \frac{e^2+1}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 3.
Calculer l'intégrale suivante :
(iv) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\,dx.$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{x^2+3x}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{2}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2+3x}{x^2+3x+2}\,dx &= [x - 2\ln|x+1| + 2\ln|x+2|]_0^2\\ &= 2 - 2\ln(3) + 2\ln(4) - (-2\ln(1) + 2\ln(2))\\ &= 2 + 2\ln(2/3).\end{aligned}$$

Exercice 4.
Déterminer si l'intégrale impropre est convergente et si oui, en calculer la valeur :
(v) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx.$

La fonction $x \mapsto (x-2)^{-1/2}$ n'est pas définie en 2. Soit $a \in]2,3[$. On a

$$\int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \left[2\sqrt{x-2}\right]_a^3 = 2 - 2\sqrt{a-2}.$$

Donc

$$\lim_{a\to 2^+} \int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 2.$$

L'intégrale impropre est donc convergente et

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 2.$$