Université de Rennes 1 — MIEE L1
Année 2011-2012 — Module AN1

Contrôle continu 3
Correction

Exercice 1. *(4 pts)*
Calculer, grâce à la règle de L'Hospital, la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}.$$

On a affaire à une forme indéterminée puisque

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

Or

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad (\sin(x))' = \cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

D'après la règle de L'Hospital, la limite recherchée est 1.

Exercice 2. *(3 pts)*
Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{2+\sin(x)}$.

D'après la formule de la dérivée d'une fonction composée,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{2+\sin x}}.$$

Exercice 3. *(13 pts)*
On définit la fonction f en posant $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.
1. *Quel est le domaine de définition de f ?*
2. *La fonction f est-elle paire ? impaire ?*
3. *Calculer la dérivée de f.*
4. *Déterminer les variations de f.*
5. *Étudier les limites de f en 1^-, 1^+ et $+\infty$.*
6. *Tracer le graphe de f.*

1. La fonction est définie sur l'ensemble où x^2 est différent de 1. Le domaine est donc $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
2. Puisque $x \mapsto x^2$ est paire, $f(-x) = f(x)$ pour tout x dans le domaine de f. La fonction f est paire. On peut l'étudier sur $[0,+\infty)$ puis compléter son graphe par symétrie par rappor à l'axe des ordonnées.
3. La dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

4. La fonction f est donc décroissante sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
5. On a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

6. On remarque que $f(0) = -1$.

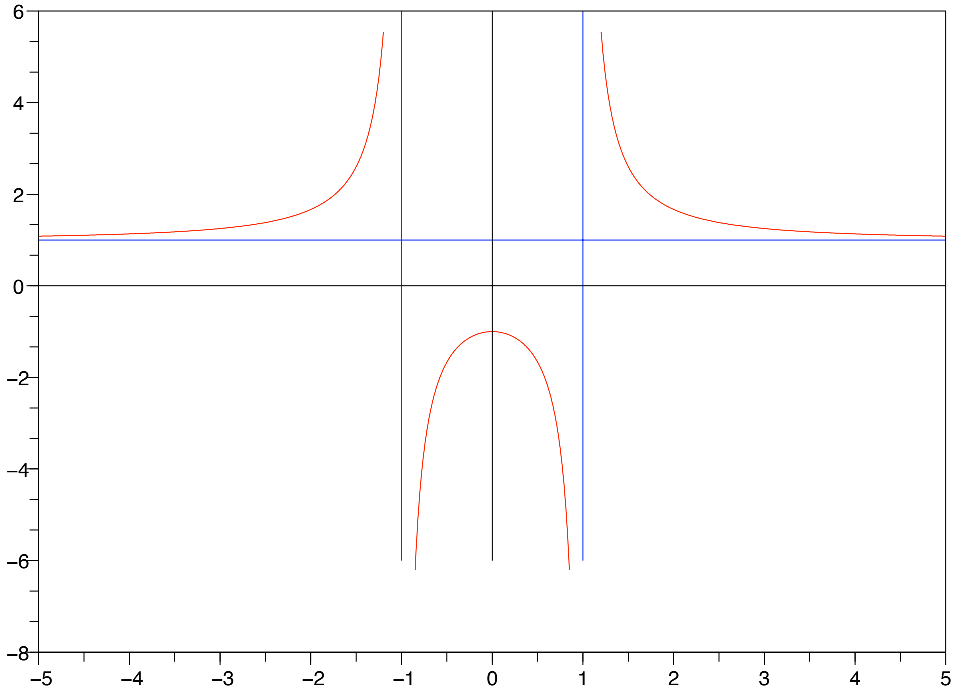

Figure 1 – Graphe de la fonction f.