Université de Rennes 1 — MIEE L1

Anne 2011-2012 — Module AN1

Contrôle continu 2
Corrigé

Exercice 1.
On notera $\ln(x)$ *le logarithme en base e de* x. *Déterminer le domaine* $\mathcal{D}$ *de la fonction composée suivante :*

$$\sqrt{\ln(4-x^2)}.$$

Pour que la fonction soit définie, il faut et il suffit que $4-x^2$ soit strictement positif et que $\ln(4-x^2)$ soit positif ou nul. La seconde condition est plus restrictive car elle impose $4-x^2 \geq 1$. En effet, la fonction ln est positive sur $[1,+\infty[$. Les solutions de l'inéquation $4-x^2 \geq 1$ sont les réels x dont le carré est infrieur ou gal 3. Le domaine de définition est donc l'intervalle $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x^2)}{x}$.

(i) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. Par composition des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$.

(ii) On écrit $\dfrac{\sin(x^2)}{x} = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}x$. En utilisant la question précédente, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0.$$

Exercice 3.

Rappelons que la fonction $\sinh(x)$ *est définie par la formule*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. *Décider pour chacune des fonctions si elle est paire ou impaire :*
   (a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x^2$.
   (b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sinh(x^5)$.
2. *Soit* k *la fonction numérique définie comme suit :* $k(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$.
   (a) *Déterminer le domaine de définition de* k*.*
   (b) *Décider si* k *est paire ou impaire.*
   (c) *Calculer, si elle existe, la limite* $\lim_{x \to +\infty} k(x)$*.*

1. Les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(x)$ donc g est paire.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$h(-x) = \frac{e^{(-x)^5} - e^{-(-x)^5}}{2} = \frac{e^{-x^5} - e^{x^5}}{2} = -h(x)$$
   donc h est impaire.
2. (a) La fonction g ne s'annule pas car $g(x) \geq 1$. La fonction k est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Elle est impaire comme rapport d'une fonction impaire sur une fonction paire.
   (c) Les fonctions g et h tendent toutes les deux vers $+\infty$ en $+\infty$. Toutefois, on peut écrire
   $$k(x) = \frac{e^{x^5}}{x^2}\left(\frac{1 - e^{-2x^5}}{1 + 1/x^2}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x^5}}{1 + 1/x^2} = 1.$$
   Enfin, par changement de variables et croissance comparée,
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^5}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^5}}{(x^5)^{2/5}} = \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^{2/5}} = +\infty.$$
   La fonction k tend donc vers $+\infty$ en $+\infty$.