Université de Rennes 1 — MIEE L1

Année 2011-2012 — Module AN1

Contrôle continu 1
Corrigé

Exercice 1.

1. *Exprimer sous forme algébrique les racines carrées de* $3+4i$.

On cherche les racines sous la forme $a+ib$ avec a et b réels. L'identification des parties réelles, parties imaginaires et modules donne les équations

$$\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=4 \\ a^2+b^2=5. \end{cases}$$

On trouve deux solutions $(a,b)=(2,1)$ et $(a,b)=(-2,-1)$. Les deux racines carrées sont donc $2+i$ et $-2-i$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2-2z-2-4i=0$.

On écrit d'après la question précédente

$$z^2-2z-2-4i=(z-1)^2-3-4i=(z-1)^2-(2+i)^2=(z-3-i)(z+1+i).$$

Donc z est solution de l'équation si $z-3-i=0$ ou $z+1+i=0$. Les solutions sont $3+i$ et $-1-i$.

Exercice 2.

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne du polynôme P *par le polynôme* Q *avec*

$$P(x)=x^4-x^3+2x^2+2x \quad \text{et} \quad Q(x)=x^2-x+1.$$

On a

$$x^4-x^3+2x^2+2x=(x^2-x+1)(x^2+1)+3x-1.$$

Exercice 3.

On note z *le nombre complexe* $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1. *Quel est le module de* z *? Donner la forme exponentielle de* z.

Par définition, $|z|=\sqrt{1/4+3/4}=1$. D'autre part,

$$\cos(2\pi/3)=-1/2 \quad \text{et} \quad \sin(2\pi/3)=\sqrt{3}/2.$$

On a donc $z=e^{2i\pi/3}$.

2. *En déduire la forme algébrique de* z^2, z^3, z^4, z^5 *et* z^{2011}.

$$\begin{aligned} z^2 &= e^{4i\pi/3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z^3 &= e^{6i\pi/3}=1, \\ z^4 &= z^3z=z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z^5 &= z^3z^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, $2011=670*3+1$ donc $z^{2011}=(z^3)^{370}z=z$.