Universités de Rennes 1 / Rennes 2 **2006-2007**

Licence 2 - UED : Mathématiques

Géométrie 2

Quadrilatères

Exercice n°1

Construire à la règle et au compas un parallélogramme ABCD sachant que :

AB = 7 cm, AD= 5 cm et AC =10 cm

Exercice n°2

On considère un losange ABCD de centre O.

a) On joint les milieux I, J, K, L des côtés consécutifs. Montrer que $IJKL$ est un rectangle.

b) On note respectivement E, F, G et H les projections orthogonales de O sur les côtés (AB), (AD), (DC) et (BC). Montrer que EFGH est un rectangle.

Exercice n°3

Soit $ABCD$ un losange. Montrer que les médiatrices des segments $[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales de ce losange.

Exercice n°4

On suppose que dans un trapèze convexe $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[DC]$ les deux diagonales sont égales. Soit O leur point d'intersection. On mène par B la parallèle à (AC). Elle coupe la droite (DC) en N.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABNC$ et celle du triangle BDN ?
En déduire que les triangles AOB et DOC sont isocèles en O.

2) Comparer les triangles AOD et BOC. Quelle est la nature du trapèze $ABCD$?

3) Enoncer le théorème ainsi démontré.

Exercice n°5

Lorsque la longueur du côté d'un carré augmente de 5 %, de quel(s) poucentage(s) augmentent respectivement le périmètre et l'aire de ce carré :

A) 5% pour le périmètre et 5% pour l'aire
B) 20% pour le périmètre et 25% pour l'aire
C) 1,25% pour le périmètre et 25% pour l'aire
D) 5% pour le périmètre et 10,25% pour l'aire
E) 1,25% pour le périmètre et 5% pour l'aire

Exercice n°6

On considère un parallélogramme ABCD et M un point du segment $[AB]$. La parallèle à (AC) passant par M coupe (BC) en N. La parallèle à (BD) passant par N coupe (DC) en P. La parallèle à (AC) passant par P coupe (AD) en Q.
Montrer que MNPQ est un parallélogramme.

Exercice n°7

On considère un carré ABCD. On construit les triangles équilatéraux AEB et BFC tels que E soit intérieur à ABCD et que F lui soit extérieur. Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice n°8

Un hexagone régulier ABCDEF est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

a) Montrer que chaque côté de l'hexagone a pour longueur R.

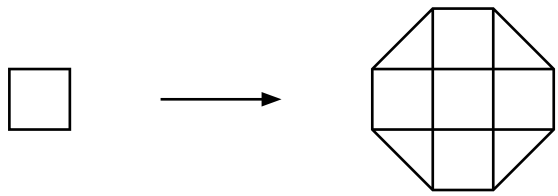
b) Calculer en fonction de R l'apothème OH (distance de O aux côtés du polygone) puis la longueur AC.

Exercice n°9

On considère trois points A, B, C alignés dans cet ordre sur une droite $\mathcal{D}$. On construit d'un même côté de $\mathcal{D}$ les carrés ABDE et BCFG. Démontrer que les droites (AD) et (CG) sont perpendiculaires.

Exercice n°10 (Rennes 2000)

A partir d'un carré de côté α, il est facile d'engendrer un octogone :



Voici des propositions faites par des élèves :

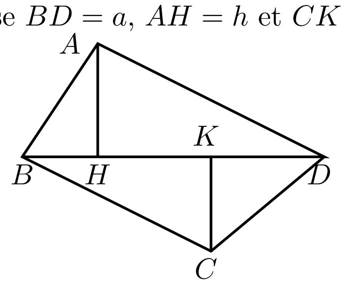
1) l'octogone est régulier
2) l'octogone a exactement deux axes de symétrie
3) son aire est $7\alpha^2$
4) son périmètre est 8α
5) son périmètre est $4\alpha(1+\sqrt{2})$
6) l'octogone a exactement quatre diagonales

Parmi ces affirmations laquelle (lesquelles) est (sont) exacte(s) ?

A) les propositions 2) et 6) sont fausses
B) les propositions 1), 2), 3), 4), 6) sont vraies
C) les propositions 3), 5) sont vraies
D) les propositions 1), 2), 3) sont vraies
E) les propositions 4) et 5) sont fausses

Exercice n°11

Considérons la figure suivante où l'on pose $BD = a$, $AH = h$ et $CK = k$:



Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de ce quadrilatère en fonction de a, h et k. Calculer $\mathcal{A}$ lorque en cm $a = 7$, $h = 3$ et $k = 5$.

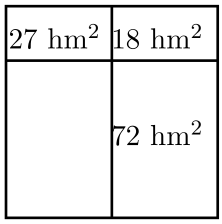
Exercice n°12 (Rennes 1995)

Dans une surface $\mathcal{A}$ d'aire a, on délimite deux surfaces $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ d'aires b et c ayant en commun une surface $\mathcal{D}$ d'aire d. Soit e l'aire de la surface $\mathcal{E}$ formée de la partie de $\mathcal{A}$ qui reste quand on enlève $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

A) On a l'égalité $b+c+d+e=a$
B) On a l'égalité $b+c+e=a+d$
C) On a l'égalité $b+c+e=a$
D) On a l'égalité $b+c+e=a+2d$

Exercice n°13 (Rennes 1999)

Ce terrain carré, représenté sur le schéma ci-contre, a un côté dont la longueur en hm est un nombre entier. On l'a partagé en quatre parcelles rectangulaires, et la figure vous fournit les aires de trois de ces parcelles.



Quelle est la longueur du côté de ce terrain ?

A) 12 hm B) 18 hm C) 15 hm D) 21 hm E) 24 hm

Cercles

Exercice n°14 *(Théorème de l'angle inscrit)*

Soient O et O' deux points distincts. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon OO' et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon OO' se coupent en A et B.

a) Donner une mesure des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AO'B}$.

b) Une droite passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en M et $\mathcal{C}'$ en M'. Montrer que le triangle BMM' est équilatéral (on envisagera les cas $A \in [MM']$ et $A \notin [MM']$).

Exercice n°15

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A un point intérieur à $\mathcal{C}$. Une droite variable $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ passant par A coupe $\mathcal{C}$ en M et N. On note I le milieu de $[MN]$.

a) Construire plusieurs points C.

b) Sur quelle courbe se déplace le point I lorsque la droite $\mathcal{D}$ pivote autour de A ?

Exercice n°16 (Rennes 1995)

Dans un cercle, une corde est un segment joignant deux points de la circonférence. Le rayon est la mesure d'un segment joignant le centre à un point de la circonférence.

A) La mesure d'une corde n'est jamais inférieure au rayon.

B) La mesure d'une corde n'est jamais supérieure au rayon.

C) La mesure d'une corde n'est jamais inférieure à deux fois le rayon.

D) La mesure d'une corde peut être égale à deux fois le rayon.

Exercice n°17 (Rennes 1995)

Dans le plan, deux cercles se coupent en A et B. Soient P et Q deux points tels que [AP] est un diamètre du premier cercle, et [AQ] un diamètre du second cercle.

A) Pour tous les cercles, pourvu qu'ils se coupent, les points P, B et Q sont alignés et PQ =2 AB

B) Les points P, B et Q sont alignés pour certains cercles, mais on ne peut pas savoir s'ils le sont pour tous les cercles.

C) Il existe des cercles pour lesquels les points P, B et Q ne sont pas alignés.

D) Pour tous les cercles, pourvu qu'ils se coupent, les points P, B et Q sont alignés, mais on peut trouver des cas où PQ est différent de 2 AB.

Exercice n°18 (Rennes 1998)

A, B, C et D sont quatre points dans cet ordre sur un cercle, tels que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Alors on peut affirmer que :

A) les longueurs AD et BC sont égales

B) les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires

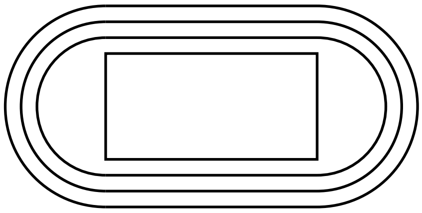
C) les longueurs AB et CD sont égales

D) les longueurs AC et BD sont égales

E) ABCD est un rectangle

Exercice n°19 (Rennes 1999)

Autour d'un terrain de football rectangulaire, de longueur 100 m et de largeur 50 m, on a tracé des couloirs de course à pied, sur le modèle du schéma représenté ci-dessous. Chaque ligne comporte deux parties rectilignes et deux demi-cercles dont les centres sont les milieux des largeurs. La première ligne mesure exactement 400 m.

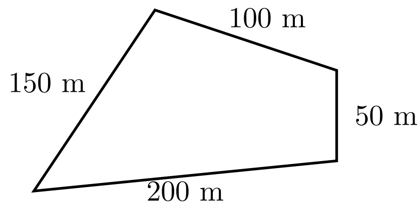


Dans ses parties rectilignes, à quelle distance d se trouve-t-elle du bord du terrain ? (On donnera la valeur de d à 1 cm près.)

A) 10 m B) 16,85 m C) 6,85 m D) 25 m E) 9,08 m

Exercice n°20 (Rennes 1999)

Ce terrain militaire, dont les dimensions sont indiquées sur le schéma, ne doit pas être approché à moins de 100 mètres. Une sentinelle effectue sa ronde de surveillance autour du terrain, en restant scrupuleusement à 100 mètres du bord du domaine.

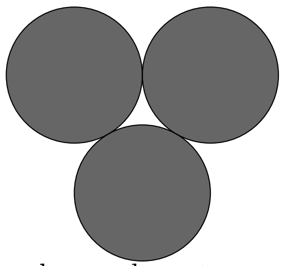


Quelle est, au mètre près, la longueur d'un tour de ronde ?

A) 1 400 m B) 1 376 m C) 600 m D) 1 000 m E) 1 128 m

Exercice n°21 (Rennes 2001)

La figure ci-contre est constituée de trois cercles, chacun étant tangent aux deux autres. Ces cercles (gris) délimitent un domaine fermé (blanc), dont le périmètre dépend du rayon des cercles.

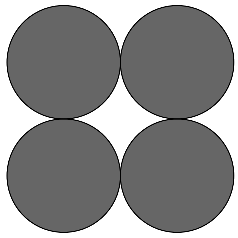


Si le périmètre de ce domaine est de 3cm, le rayon en cm de chacun des cercles est approximativement de

A) 1,047 B) 1 C) 0,955 D) 0,863 E) 1,109

Exercice n°22 (Rennes 2001)

La figure ci-dessous est constituée de quatre cercles, tangents deux à deux, dont les centres forment un carré. Ces cercles (gris) délimitent un domaine fermé (blanc), dont l'aire dépend du rayon des cercles.



Si le rayon est de 1 cm, l'aire de ce domaine est approximativement de ...

A) 114 mm^2 B) 1,14 cm^2 C) 860 mm^2 D) 0,86 cm^2 E) 86 mm^2

Exercice n°23

On considère un cube dont une arête mesure $1 + \sqrt{2}$. Calculer :

a) la longueur totale des arêtes de ce cube.
b) l'aire d'une face de ce cube.
c) la surface totale de ce cube.
d) le volume de ce cube.

Exercice n°24

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. On découpe quatre carrés identiques, un dans chaque coin, et on plie de façon à obtenir une boîte sans couvercle. Sachant que les côtés des carrés découpés mesurent 3 cm, quel est le volume défini par la boîte ?

Exercice n°25 (Rennes 1996)

a étant la longueur de l'arête d'un cube, son volume est $a \times a \times a$, son aire est $6 \times a \times a$.
Un cube a pour volume 216 cm^3.

A) Son aire est inférieure à 216 cm^2
B) Son aire est égale à 216 cm^2
C) Son aire est supérieure à 216 cm^2
D) On ne peut pas savoir

Exercice n°26 (Rennes 1999)

Quel est le volume d'un cube dont la surface est de 1 m^2 ?

A) $\dfrac{1}{6\sqrt{6}}$ m^3
B) 1 m^3
C) $\dfrac{1}{6}$ m^3
D) 6,8 l
E) $\dfrac{\sqrt{2}}{36}$ m^3

Exercice n°27

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre O et de rayon 5 cm. On la coupe selon un plan horizontal. La section est un cercle $\mathcal{C}$ de centre H. La calotte sphérique obtenue a pour hauteur 1 cm. Calculer OH et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Exercice n°28

Soit ABC un triangle rectangle en A. On fait tourner ce triangle autour de la droite (AC). On obtient un cône de sommet C. On sait que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

1) Calculer la longueur BC.

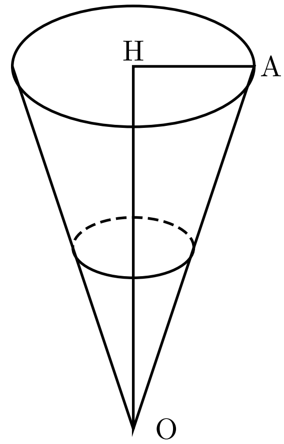
2) Déterminer la nature de la courbe $\mathcal{C}$ décrite par B et calculer sa longueur et l'aire de la surface qu'elle définit.

3) Calculer le volume du cône.

Exercice n°29 (Rennes 1998)

Un cône C a une hauteur $OH = h$ et un rayon de base $HA = r$. Son volume est $\dfrac{1}{3}(S \times h)$ où S est l'aire de la base. L'aire latérale du cône est $\pi r \ell$ où $\ell = OA$ est la longueur de l'arête.
On coupe le cône à la moitié de sa hauteur. On obtient alors d'une part un petit cône C' et d'autre part un tronc de cône R.
Quelle fraction du volume total du cône C le volume du tronc de cône R représente-t-il ?

A) la fraction est $\dfrac{1}{2}$
B) la fraction est $\dfrac{2}{3}$
C) la fraction est $\dfrac{3}{4}$
D) la fraction est $\dfrac{5}{6}$
E) la fraction est $\dfrac{7}{8}$



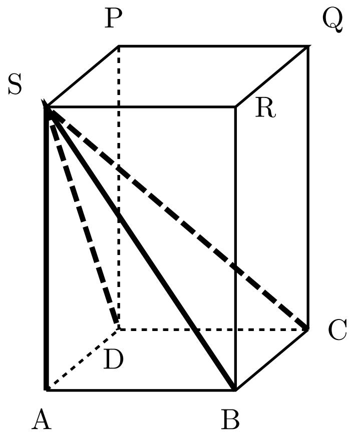
$\boxed{\textbf{Exercice n°30}}$ (Rennes 1998)

La situation est la même que dans la **question 23** avec $h = 8$ cm et $r = 6$ cm.
Quelle est, au cm^2 près, l'aire latérale du petit cône C' ?

A) l'aire latérale de C' est 47 cm^2
B) l'aire latérale de C' est 50 cm^2
C) l'aire latérale de C' est 53 cm^2
D) l'aire latérale de C' est 56 cm^2
E) l'aire latérale de C' est 59 cm^2

$\boxed{\textbf{Exercice n°31}}$ (Montpellier 2005)

La perspective cavalière ci-contre représente une pyramide SABCD inscrite dans un pavé droit. Combien de faces de cette pyramide sont des triangles rectangles ?

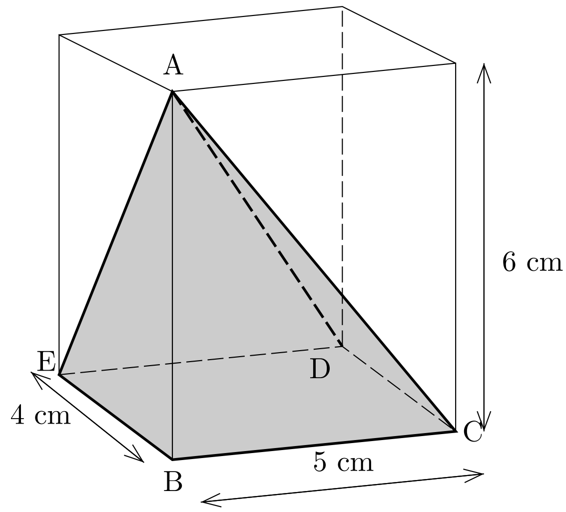


$\boxed{\textbf{Exercice n°32}}$ (Rennes 2006)

La pyramide $ABCDE$ est construite dans un pavé droit de longueur 5 cm, de largeur 4 cm et de hauteur 6 cm.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est-elle (sont-elles) exacte(s) ?

A) Le triangle ADC est un triangle isocèle.
B) Le triangle AED est un triangle isocèle.
C) Une arête de la pyramide $ABCDE$ a pour longueur $\sqrt{77}$ cm.
D) 7,1 cm est la valeur au mm près par défaut de la longueur d'une des arêtes de la pyramide $ABCDE$.
E) Deux des arêtes de la pyramide $ABCDE$ ont leur longueur comprise entre 7 cm et 8 cm.



$\boxed{\textbf{Exercice n°33}}$ (Rennes 2005)

Sur chaque arête de longueur a d'un cube de bois, on marque le milieu. Puis on scie chaque "coin" du cube, en prenant appui sur les points ainsi marqués, comme le montre le schéma ci-dessous.

Parmi les affirmations suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) exacte(s) ?

A) Le solide restant après découpage est un cube.
B) Avec les "chutes", on peut reconstituer un cube dont l'arête mesure $a\sqrt{2}$.
C) Le solide restant après découpage comporte 12 faces, dont six faces carrées et six faces triangulaires.
D) Le solide restant après découpage comporte 14 faces, dont six faces carrées et huit faces triangulaires.
E) Le volume total des chutes est de $\dfrac{a^3}{6}$.