Universités de Rennes 1/Rennes 2 **2007-2008**

Licence (L3) UED IUFM
Corrigé rapide de l'épreuve de Mathématiques du 15 décembre 2007

Exercice n°1

Appelons n le nombre de personnes présentes à cette réunion.

- 1ère méthode. Chacune des n personnes a serré la main à exactement $(n-1)$ personnes (toutes sauf elle-même), ce qui fait en tout $n \times (n-1)$ poignées de main. Mais il faut prendre garde que l'on compte ainsi deux fois toutes les poignées de main (la poignée de main entre A et B est comptée comme effectuée par A mais aussi comme effectuée par B). Le nombre de poignées de main échangées est donc $\frac{n(n-1)}{2} = 28$. Cela conduit à $n(n-1) = 56$: $n-1$ et n sont deux diviseurs successifs de $56 = 2^3 \times 7$. Comme 56 admet $4 \times 2 = 8$ diviseurs qui sont 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 et 56, on en déduit que $n = 8$.

- 2ème méthode. Numérotons les personnes de 1 à n et comptons les poignées de main ainsi : la première personne serre la main à toutes les autres ; la deuxième personne serre ensuite la main à toutes les autres sauf à la première (c'est déjà fait) ; la troisième serre ensuite la main à toutes les autres sauf les deux premières ... Le nombre total de poignées de main est donc

$$\begin{array}{rcccccccccccccl} 28 & = & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \quad \text{soit aussi} \\ 28 & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 \quad \text{et donc} \\ 28+28 & = & n & + & n & + & n & + & \cdots & + & n & + & n & + & n \quad = n(n-1) \end{array}$$

- Troisième méthode Le nombre de poignées de main est égal au nombre de façons de choisir deux personnes distinctes parmi les n c'est à dire au nombre de combinaisons de deux éléments parmi n. Il est donc égal à $C_n^2 = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$.

- Quatrième méthode On part de deux personnes qui se saluent (une poignée de main) puis arrive une troisième personne qui salue les deux précédentes, puis une quatrième (qui salue les trois précédentes) et on continue ainsi jusqu'à obtenir le bon total de poignées de mains. On obtient successivement $1+2=3$ $(n=3)$, $3+3=6$ $(n=4)$, $6+4=10$ $(n=5)$, $10+5=15$ $(n=6)$, $15+6=21$ $(n=7)$ et $21+7=28$ $(n=8)$.

Exercice n°2

Le texte nous indique donc que $BF = 1$ cm et $FC = 13$ cm (et donc que $ABCD$ est un carré de $13+1 = 14$ cm de côté) mais aussi que $EA + AB + BF = 21$ cm (l'alternative est $EA + AB + BF = 35$ cm mais cela conduit à $AE = 20$ cm ce qui est clairement impossible) ce qui entraîne que $AE = 21 - 14 - 1 = 6$ cm.
On peut alors soit appliquer une formule donnant l'aire d'un trapèze, soit introduire le projeté orthogonal H de F sur (AE) et écrire $\text{Aire}(ABFE) = \text{Aire}(ABFH) + \text{Aire}(EFH) = AB \times BF + \frac{EH \times HF}{2}$. On obtient

$\text{Aire}(ABFE) = 14 \times 1 + \dfrac{14(6-1)}{2} = 49 \text{ cm}^2$.
Bien sûr, $\text{Aire}(CDEF) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(ABFE) = 14^2 - 49 = 147 \text{ cm}^2$.

Exercice n°3

1) Dans le triangle PQR, on a $(ST)//(QR)$ donc (théorème de Thalès) $\dfrac{PS}{PQ} = \dfrac{PT}{PR}$. D'autre part, dans le triangle PSR, on a $(UT)//(SR)$ donc (Thalès) $\dfrac{PU}{PS} = \dfrac{PT}{PR}$. Or, $PU = 4$ et $PS = PU + US = 4 + 6 = 10$ donc $\dfrac{PT}{PR} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ et finalement $\dfrac{PS}{PQ} = \dfrac{2}{5}$.

2) On en déduit donc $\dfrac{10}{PQ} = \dfrac{2}{5}$ soit $PQ = \dfrac{5}{2} \times 10 = 25$ et par suite, $SQ = PQ - PS = 25 - 10 = 15$ cm.

Exercice n°4

Appelons q la quantité de nourriture nécessaire à un cochon pour une journée.

- 14 cochons ont alors besoin de $14q$ par jour et donc en tout de $14q \times 16$ pour 16 jours : l'auge contient donc une quantité de nourriture égale à $14q \times 16$.
- Si l'on retire 6 cochons, il n'en reste que 8 qui mangent (à eux huit) $8q$ par jour. La nourriture de l'auge durera donc $\dfrac{14q \times 16}{8q} = 28$ jours.

<u>Autre méthode :</u> Si une auge contient ce qu'il faut de nourriture pour 14 cochons pendant 16 jours, cette même auge permet de nourrir un seul cochon 14 fois plus longtemps c'est à dire 14×16 jours. Elle nourrit enfin 8 cochons pendant 8 fois moins de temps et donc pendant $\dfrac{14 \times 16}{8} = 28$ jours.

Exercice n°5

Notons P le prix de vente initial de l'article. Après la première baisse, l'article coûte $P' = P - \dfrac{10}{100}P = 0,9P$; après la seconde baisse, il ne vaut plus que $P' - \dfrac{15}{100}P' = 0,85P' = 0,85 \times 0,9P$ soit $0,765P$. Avec la remise supplémentaire, le client paie finalement $0,765P - 10 = 143$. On a donc $0,765P = 153$ soit $P = \dfrac{153}{0,765} = 200$. L'article valait initialement 200 euros.