Licence (L2) UED IUFM
Corrigé rapide de l'épreuve de Mathématiques du 21 avril 2007

Exercice n°1

Notons $ABCD$ le carré inscrit dans le cercle. ABC est un triangle inscrit dans le cercle et rectangle en B donc $[AC]$ est un diamètre de ce cercle. D'autre part, le théorème de Pythagore assure que $AC^2 = AB^2 + BC^2$ soit $AC^2 = 10^2 + 10^2$ donc $AC^2 = 100 + 100 = 200$ et $AC = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.
L'aire du disque est $\pi r^2 = \pi \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \pi \frac{AC^2}{4} = 50\pi$.
L'aire du carré inscrit est $10^2 = 100$.
L'aire **exacte** hachurée est donc finalement $(50\pi - 100)$ cm^2.

Exercice n°2

On a $2^1 = \mathbf{2}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $2^3 = \mathbf{8}$, $2^4 = 1\mathbf{6}$, $2^5 = 3\mathbf{2}$, $2^6 = 6\mathbf{4}$, $2^7 = 12\mathbf{8}$, ...
On constate donc que le chiffre des unités est, de manière périodique, 2, 4, 8, 6. La période est de longueur 4 (il y a quatre chiffre dans la période). Comme $2008 = 4 \times 502 = 4 \times 501 + 4$, le chiffre des unités de 2^{2008} est le même que celui de 2^4 (501 périodes ne changent pas le chiffre). C'est donc un 6.
De même, on a $7^1 = \mathbf{7}$, $7^2 = 4\mathbf{9}$, $7^3 = 34\mathbf{3}$, $7^4 = 240\mathbf{1}$, $7^5 = 1680\mathbf{7}$, $2^6 = 11764\mathbf{9}$, ...
Là encore, la période est de longueur 4 et comme $777 = 4 \times 194 + 1$, le chiffre des unités de 7^{777} est le même que celui de 7^1 (194 périodes ne changent pas le chiffre). C'est donc un 7.
Finalement, le chiffre des unités de $2^{2008} \times 7^{777}$ est celui de $6 \times 7 = 42$: c'est le 2.

Exercice n°3

1) 70 % des élèves ayant une mauvaise vue portent des lunettes et cela correspond à 21 élèves (21 paires de lunettes). L'école comporte donc $100 \times \frac{21}{70} = 30$ élèves ayant une mauvaise vue.

2) 40 % des élèves de cette école ont une mauvaise vue et on vient de voir que cela correspond à 30 élèves. Le nombre d'élèves de cette école est donc de $100 \times \frac{30}{40} = 75$.

3) Le nombre d'élèves portant des lentilles représente 30 % des élèves ayant une mauvaise vue donc 40 % de 30 % du total des élèves soit 12% de ce total ($\frac{40}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{12}{100}$).

Exercice n°4

Si d désigne la longueur (en cm) du côté du carré, les données imposent que d soit un multiple de 12 mais aussi un multiple de 18 donc un multiple commun à 12 et 18. Pour obtenir le plus petit carré, il faut donc choisir d le plus petit possible c'est à dire prendre $d = ppcm(12, 18)$. Or, $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$ donc $ppcm(12, 18) = 2^2 \times 3^2 = 36$. Le carré cherché a donc pour aire $36^2 = 1296$ cm^2.

$\boxed{\textbf{Exercice n°5}}$

Cette terrasse carrée à pour aire $9 \times 9 = 81$ m^2. Il est tombé 12 mm $= 12.10^{-3}$ m d'eau donc le volume récupéré est de $81 \times 12.10^{-3} = 972.10^{-3}$ m^3 d'eau.
Comme un mètre cube est égal à 10^3 dm^3 et que un décimètre cube est égal à un litre, la quantité d'eau récupérée est finalement de $0,972$ m^3 soit 972 litres.

$\boxed{\textbf{Exercice n°6}}$

Notons d la distance (en km) à parcourir et t le temps de parcours (en heures) à 15 km/h. On a alors $d = 15t$. A 20 km/h, on met deux heures de moins (soit $t - 2$ heures) pour la même distance donc $d = 20(t-2) = 20t - 40$. On en déduit donc $15t = 20t - 40$ soit $40 = 5t$ et $t = 8$. Par suite, la distance cherchée est $d = 15 \times 8 = 120$ km.

$\boxed{\textbf{Exercice n°7}}$

L'aire du triangle AOL (rectangle en A) est $14 = \dfrac{AL \times AO}{2}$ donc $AL = \dfrac{2 \times 14}{AO} = \dfrac{28}{4} = 7$. En raisonnant de même dans les triangles BLM et DON, on obtient $BL = \dfrac{2 \times 21}{3} = 14$ et $OD = \dfrac{2 \times 75}{10} = 15$.
Le rectangle $ABCD$ a ses côtés opposés de même longueur et comme $AD = AO + OD = 4 + 15 = 19$, on a $MC = 19 - BM = 16$. De même, on obtient $AB = 21$ et $NC = 11$.
L'aire du triangle MNC est alors $\dfrac{MC \times NC}{2} = \dfrac{16 \times 11}{2} = 88$ cm^2.
L'aire du quadrilatère $LMNO$ est égale à l'aire du rectangle $ABCD$ moins l'aire des quatre triangles rectangles.
L'aire cherchée est donc finalement $21 \times 19 - (14 + 21 + 75 + 88) = 399 - 198 = 201$ cm^2.