Chapitre 1

Méthodes numériques

Rappel sur les ensembles de nombres

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels (les "fractions") : $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{d} | n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^*\}$. On rappelle que pour la fraction $\frac{n}{d}$, n est le *numérateur* et d le *dénominateur*.

1.1 Puissances

Imaginons que l'on multiplie 7 par lui même un certain nombre de fois. Cela peut être par exemple $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$. Cette écriture n'est pas très lisible et c'est pourquoi nous introduisons la **notation** suivante : $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6$ et on lit 7 à la puissance 6.
Plus généralement, si a est un réel et n un entier naturel, nous noterons

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n facteurs}$$

avec la convention $a^0 = 1$. L'expression "n facteurs" signifie que le nombre en question (a ici) est multiplié par lui-même $(n-1)$ fois. Par exemple $2^5 = \underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{5\ facteurs} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$.

On généralise cette notation aux puissances négatives en convenant que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Par exemple $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Remarque. Tout le monde se souvient des identités remarquables (au moins du nom !). Par exemple $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il n'est pas très grave d'oublier ce genre de formule à condition de comprendre ce que l'on écrit : $(a+b)^2$ est la puissance 2 (on dit le carré) de $(a+b)$ donc $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
On constate au passage que la puissance d'une somme n'est pas la somme des puissances.

Règles de calcul sur les puissances

Que donne $7^5 \times 7^8$? Compte tenu de nos notations, on a :

$$7^5 \times 7^8 = \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{5\ facteurs} \times \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{8\ facteurs} = \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{(5+8)\ facteurs} = 7^{5+8} = 7^{13}$$

D'une manière générale, nous retiendrons : $\boxed{a^p \times a^q = a^{p+q}}$.
De même on a par définition :

$$\left(7^4\right)^3 = 7^4 \times 7^4 \times 7^4 = \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{4\ facteurs} \times \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{4\ facteurs} \times \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{4\ facteurs} = \underbrace{7 \times \ldots \times 7}_{3\times 4\ facteurs} = 7^{3\times 4} = 7^{12}$$

D'une manière générale, nous retiendrons : $\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$.

Compte tenu de la convention $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on déduit de manière immédiate : $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$.

Calculons à présent $(3 \times 7)^4$. Par définition, on a :

$$(3 \times 7)^4 = (3 \times 7) \times (3 \times 7) \times (3 \times 7) \times (3 \times 7) = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 3^4 \times 7^4$$

D'une manière générale, nous retiendrons : $\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$. En remplaçant b par $\dfrac{1}{b}$, on obtient encore : $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$.

Remarque. Un cas particulier amusant : pour tout entier n, $(-1)^n = \begin{cases} +1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1.2 Écriture décimale

Le nombre six cent quarante deux s'écrit (en écriture décimale) 642.
2 est le chiffre des unités, 4 celui des dizaines et 6 celui des centaines. Cela signifie que $642 = 6 \times 100 + 4 \times 10 + 2 \times 1$.
Plus généralement, l'écriture $\overline{abcd}$ correspond au nombre $a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1$. La barre au dessus de $abcd$ permet d'éviter la confusion avec le produit $a \times b \times c \times d$ (il ne viendrait à l'idée de personne de penser que $642 = 6 \times 4 \times 2$ mais avec des lettres remplaçant les chiffres, la confusion est aisée).
L'outil des puissances permet l'écriture décimale de tous les nombres :

$$\overline{a_n \cdots a_1 a_0} = a_n \times 10^n + \cdots + a_2 \times 10 + a_0 \times 10^0$$

Par exemple $12642 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 = 10000 + 2000 + 600 + 40 + 2$.

Nombres décimaux

Un nombre décimal est un rationnel pouvant s'écrire sous la forme $m \times 10^e$ où m est un entier relatif appelé *mantisse* et e un entier relatif appelé *exposant*. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples. Il est clair que tous les entiers sont des décimaux puisque par exemple $13 = 13 \times 10^0$. De même, tout nombre dont l'écriture ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule est un décimal. Par exemple, $1,233$ est un décimal puisque l'on peut écrire $1,233 = 1233 \times 10^{-3}$. Par contre, $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal : la division de 1 par 3 ne "tombe pas juste" et on ne peut pas écrire $\frac{1}{3}$ avec un nombre fini de chiffres.

1.3 Fractions rationnelles

Forme simplifiée d'une fraction

Remarquons tout d'abord que si a, b et c sont des entiers non nuls alors on a $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ (on dit que l'on a simplifié la fraction par c). On retiendra :
On ne change pas la valeur d'une fraction en <u>multipliant</u> numérateur et dénominateur par un même nombre (non nul).

Exemple. $\dfrac{323}{247} = \dfrac{19 \times 17}{19 \times 13} = \dfrac{19}{13}$.

Somme de deux fractions

Si a, b et c sont des entiers non nuls alors on a

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Conséquence. Si a, b, c et d sont des entiers non nuls alors on a $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}$ (réduction au même dénominateur). On retiendra finalement :

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$$

Exemple. Calculons $\frac{3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{3\times 8+5\times 7}{7\times 8}=\frac{24+35}{56}=\frac{59}{56}$.

Remarque. Dans l'exemple précédent, la fraction obtenue est irréductible mais ce n'est pas nécessairement le cas comme le prouve l'exemple suivant : $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{1}{2}$.

Produit de deux fractions

Si a, b, c et d sont des entiers non nuls alors on a

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Exemple. $\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}=\frac{3\times 5}{7\times 8}=\frac{15}{56}$

Inverse d'une fraction

L'inverse d'un nombre n étant le nombre qui multiplié par n donne 1, on a : $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ et donc aussi $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$. Nous retiendrons : $\boxed{\text{diviser par } \frac{a}{b}\text{, c'est multiplier par } \frac{b}{a}}$.

1.4 Règles de calculs - Équations

1.4.1 Développement - factorisation

Pour tous nombres a, b et c, on a :

$$a(b+c)=ab+ac$$

Lue dans le sens $\rightarrow$, l'opération s'appelle *développement*. Lue dans le sens $\leftarrow$, c'est la *factorisation* (par a).

1.4.2 Opérations sur les égalités - Équations

Lorsque l'on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente : si $A=B$ alors pour tout nombre C on a $A+C=B+C$.
Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un même nombre (non nul) les deux membres d'une égalité, on obtient une égalité équivalente : si $A=B$ alors pour tout nombre non nul C on a $AC=BC$.

Équation du premier degré

Supposons connus les nombres $a \neq 0$, b et c et cherchons le(s) nombre(s) x vérifiant $ax + b = c$ (cette égalité est dite *équation du premier degré* d'inconnue x). Les règles que nous venons de rappeler nous montrent que :

$$\begin{aligned} ax + b = c \quad &\Longleftrightarrow ax + b - b = c - b \\ &\Longleftrightarrow ax = c - b \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(c - b) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{c - b}{a} \end{aligned}$$

Exemple. Résoudre l'équation $3x + 2 = 7$. On écrit $3x + 2 = 7 \Leftrightarrow 3x = 5$ et on a donc pour unique solution $x = \dfrac{5}{3}$.

1.4.3 Opérations sur les inégalités

Addition

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux membres : si $A \leq B$ alors pour tout nombre C on a $A + C \leq B + C$.

Multiplication

On ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre **strictement positif** : si $A \leq B$ alors pour tout nombre C tel que $C > 0$ on a $AC \leq BC$.
Multiplier (ou diviser) les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif** en change le sens : si $A \leq B$ alors pour tout nombre C tel que $C < 0$ on a $AC \geq BC$.

1.4.4 Racine carrée

On appelle *racine carrée* d'un nombre <u>positif</u> a l'unique nombre <u>positif</u> dont le carré vaut a.

Exemples. $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{2} \simeq 1,4$

Remarque. $(-2)^2 = 4$ et d'une manière générale on a donc $\sqrt{a^2} \neq a$. Cette propriété n'est en fait vraie que lorsque a est positif.

Propriétés

Pour tous nombres positifs a et b on a :

- Par définition même, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (puisque $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$)
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (lorsque b est non nul)

Remarque. Attention : $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ puisque leurs carrés $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$ sont différents.

1.4.5 Rappels sur les pourcentages

Supposons que l'on perçoive une commission de 3 % sur une somme S alors pour une somme de 100 on percevra 3, pour une somme de 200 on percevra 6, pour une somme de 150 on percevra 4,5, ... On reçoit donc en fait $S \times \dfrac{3}{100}$.
De même, augmenter une somme S de 3%, c'est lui ajouter l'augmentation de 3 %. On obtient alors la nouvelle somme $S + S \times \dfrac{3}{100} = S\left(1 + \dfrac{3}{100}\right) = 1,03S$. On retiendra donc qu'augmenter une somme de 3 % c'est la multiplier par 1,03.
D'une manière générale, augmenter de x % c'est multiplier par $1 + \dfrac{x}{100}$.
De même, diminuer de x % c'est multiplier par $1 - \dfrac{x}{100}$.

Remarque. Les deux principales difficultés avec les pourcentages tiennent aux faits que :

- Les pourcentages ne s'ajoutent pas : deux hausses successives de 10 % n'équivalent pas à une hausse de 20 % mais à deux multiplications par 1,1 soit une multiplication par 1,21 et donc finalement une hausse de 21 % !

- Les pourcentages ne sont pas réversibles : le contraire d'une hausse de 15 % n'est pas une baisse de 15 % mais une division par 1,15 donc une multiplication par $\frac{1}{1,15} \simeq 0,87$ soit une baisse d'environ 13 % ...

1.4.6 A propos de la vitesse

Même si l'unité légale est le mètre par seconde, la vitesse s'exprime couramment en kilomètres par heure. Par exemple, un automobiliste parcourant 140 km en deux heures a une vitesse moyenne sur son trajet de $\dfrac{140}{2} = 70$ km/h. D'une manière générale, la vitesse v sur un trajet d'une durée t et de longueur d est exprimée par la formule $\boxed{v = \dfrac{d}{t}}$.
Cette formule peut être librement transformée pour obtenir l'une ou l'autre des trois grandeurs (temps, distance, vitesse). Ainsi, en multipliant par t on obtient $\boxed{d = vt}$. En divisant cette nouvelle équation par v on déduit aussi $\boxed{t = \dfrac{d}{v}}$.
Comme toujours, il est inutile d'apprendre toutes ces formules : il est préférable de connaître uniquement la première et de savoir retrouver immédiatement les autres.

Remarque. Il faut prendre garde au fait que la vitesse moyenne **n'est pas** la moyenne des vitesses. Un aller à 10 km/h et un retour à 90 km/h ne fait pas une vitesse moyenne de (10+90)/2=50 km/h, mais seulement de 18 km/h ! (Le vérifier.)

1.5 Systèmes de deux équations à deux inconnues

On cherche deux réels x et y tels que $ax + by = c$ et $dx + ey = f$ où a, b, c, d, e, f sont des réels connus.
Pour résoudre ce problème, une solution consiste à éliminer une inconnue entre les deux équations pour se ramener à une équation à une inconnue. Par exemple : si a est non nul, on peut écrire $x = (c - by)/a$ et en reportant dans la deuxième équation, on se ramène à une équation en une seule inconnue. Voyons cela sur un exemple pratique.
Dans un même bar, on observe un jour donné les deux additions suivantes :

- Deux bières et trois jus de fruit : 9 euros

- Quatre bières et deux jus de fruit : 12 euros

Quels sont les prix respectifs de la bière et du Jus de fruit ?
Notons x le prix (en euros) d'une bière et y le prix d'un jus de fruit. Deux bières coûtent alors $2x$ et trois jus de fruit $3y$ et on a donc $2x + 3y = 9$. En procédant de même avec la deuxième note, on obtient finalement deux équations formant le système suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right.$$

La première équation permet d'écrire $x = \dfrac{9 - 3y}{2}$, valeur que l'on peut reporter dans la deuxième équation. Le système devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{9 - 3y}{2} \\ 4\left(\dfrac{9 - 3y}{2}\right) + 2y = 12 \end{array} \right.$$

La deuxième équation s'écrit $18 - 6y + 2y = 12$ soit $-4y = -6$ et conduit donc à $y = \frac{6}{4} = 1,5$. En reportant alors dans la première équation on obtient $x = \dfrac{9 - 3 \times \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{18}{2} - \frac{9}{2}}{2} = \dfrac{9}{4}$.
La bière coûte donc $2,25$ euros et le jus de fruit $1,5$ euros.
Une autre technique possible consiste à combiner directement les équations entre elles afin d'éliminer une des inconnues. Par exemple, en multipliant la première équation de notre système (S) par (-2), on obtient le système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x - 6y = -18 \\ 4x + 2y = 12 \end{array} \right.$$

En ajoutant ces deux équations, on retombe sur l'égalité $-4y = -6$ ...