Chapitre 3

Éléments d'arithmétique

3.1 Division euclidienne

3.1.1 Division euclidienne

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Lorsque nous posons la division de a par b, deux cas se présentent :

- soit, à une certaine étape, nous trouvons un zéro dans la colonne de gauche ce qui nous indique que la fraction $\frac{a}{b}$ est un entier, par exemple :

$$\begin{array}{r|l} \overline{39}1 & 17 \\ \cline{2-2} 51 & 23 \\ 0 & \end{array} \quad \text{et on a bien } 391 = 23 \times 17 \text{ soit } \frac{391}{17} = 23$$

- soit nous trouvons un entier r non nul mais strictement plus petit que b et nous nous arrêtons, par exemple :

$$\begin{array}{r|l} 131 & 7 \\ \cline{2-2} 61 & 18 \\ 5 & \end{array} \quad \text{et on a bien } 131 = 7 \times 18 + 5 \text{ avec } 5 < 7$$

Nous n'introduisons ainsi aucun nombre “à virgule”. Cette opération s'appelle la *division euclidienne de a par b*. Nous obtenons donc l'égalité $a = bq + r$. Par construction et du fait que $0 \leq r < b$, le couple (q, r) est unique ce qui permet de donner la définition suivante :

Définition 3.1 *Soient a et b deux entiers naturels, b étant non nul. La division euclidienne de a par b est l'égalité*

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b \qquad \begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \cdot & q \\ \cdot & \\ r & \end{array}$$

Pour le vocabulaire, b est appelé le diviseur, a le dividende, q le quotient et r le reste.

Exemple. La division euclidienne de 648 par 17 donne $648 = 17 \times 38 + 2$ (et on a bien $2 < 17$).

3.2 Divisibilité - Nombres premiers

3.2.1 Diviseurs et multiples

De nos tables de multiplications bien connues, nous avons retenu : $3 \times 2 = 6$. 6 est donc un multiple de 3. On dit aussi que 3 divise 6. D'une manière générale :

Définition 3.2 *Soient a et b deux entiers naturels. S'il existe un entier k tel que $a = kb$, on dit que :*

- *b divise a ou encore b est un diviseur de a ou encore a est divisible par b ;*
- *a est un multiple de b.*

Exemples. 1 est diviseur de tout entier alors que 0 est multiple de tout entier (et est diviseur uniquement de lui-même).
Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Règles de divisibilité

Il est très utile de savoir rapidement si un entier est divisible par 2, 3, 5, 9, 10, 11.

- un entier est divisible par 2 (on dit aussi *pair*) si et seulement si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
- un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3
- un entier est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5
- un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 9
- un entier est divisible par 10 si et seulement si son chiffre des unités est 0
- un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée des chiffres qui le composent est divisible par 11

Exemples. 753 est divisible par 3 puisque $7 + 5 + 3 = 15$ et $1 + 5 = 6$ est divisible par 3. Il n'est par contre pas divisible par 9. 8283 est divisible par 11 puisque $8 - 2 + 8 - 3 = 11$; par contre 753 ne l'est pas car $7 - 5 + 3 = 5$ n'est pas divisible par 11.

3.2.2 Nombres premiers

Définition 3.3 *Un nombre strictement supérieur à 1 est dit premier si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.*

Exemples. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont des nombres premiers (ce sont les huit plus petits). Par contre 4 et 6 ne le sont pas (ils sont divisibles par 2).

3.2.3 Décomposition en facteurs premiers

Théorème 3.4 *Tout entier a supérieur ou égal à 2 peut être décomposé d'une manière unique sous la forme d'un produit*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

où $p_1, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers vérifiant $p_1 < \cdots < p_k$ et les exposants $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sont des entiers strictement positifs.

Exemple. La décomposition en facteurs premiers de 540 est $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.

Méthode d'obtention de la décomposition

On part de notre nombre à décomposer et on observe s'il est divisible par les différents nombres premiers en commençant par le plus petit : 2. Tant que l'on peut, on divise alors par le nombre premier. On passe ensuite au nombre premier suivant. Illustrons sur deux exemples :

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} 2600 & 2 \\ 1300 & 2 \\ 650 & 2 \\ 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc d'une part $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ et d'autre part $2600 = 2^3 \times 5^2 \times 13$.

Remarque. La décomposition en facteurs premiers permet de compter les diviseurs d'un nombre. Par exemple $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ possède $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs dans $\mathbb{N}$. En effet, la décomposition d'un diviseur de 180 ne peut comporter que les nombres premiers 2, 3 et 5. Il y a de plus trois possibilités pour l'exposant de 2 (2, 1 ou 0 quand 2 ne figure pas), trois pour l'exposant de 3 et deux pour celui de 5.

3.3 PGCD, PPCM

3.3.1 Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers naturels

Définition 3.5 *Le PGCD de deux entiers naturels a et b est l'unique entier naturel d, noté $pgcd(a, b)$ vérifiant :*

- *d divise a et d divise b (c'est un diviseur commun à a et b),*
- *tout diviseur commun à a et b divise d (c'est le "plus grand").*

Exemple. Le plus grand diviseur commun à 24 et 40 est 8, ce que l'on écrit $pgcd(24, 40) = 8$.

Première méthode de recherche du PGCD de deux entiers

On construit un tableau à trois colonnes intitulées a, b et reste. Sur la première ligne, nous plaçons les deux nombres dont nous cherchons le PGCD (nombres a et b) et dans la colonne "reste", le reste dans la division euclidienne de a par b. On construit les lignes suivantes en décalant à chaque étape vesr la gauche la ligne précédente : le nouveau a est l'ancien b, le nouveau b est l'ancien reste. Le nouveau reste est celui de la division euclidienne du nouveau a par le nouveau b.
Le PGCD de a est b est le dernier reste non nul.
Éclairons tout ceci par un exemple :

Exemple. Calcul de $pgcd(323, 247)$.

a	b	reste
323	247	76
247	76	19
76	19	0

Voici pour les justifications : $323 = 247 \times 1 + \mathbf{76}$, $247 = 76 \times 3 + \mathbf{19}$ et $76 = 19 \times 4 + \mathbf{0}$.
Le dernier reste non nul est 19 et on a donc $pgcd(323, 247) = 19$.

Cette méthode de divisions euclidiennes successives est plus connue sous le nom d'*algorithme d'Euclide*.

Exemple. On a $pgcd(1960, 252) = 28$ comme le prouve le tableau suivant (que vous justifierez)

a	b	reste
1960	252	196
252	196	56
196	56	28
56	28	0

Deuxième méthode de recherche du PGCD de deux entiers

On détermine la décomposition en facteurs premiers des deux entiers a et b. Le PGCD de a et b est alors le produit de tous les nombres premiers communs aux deux décomposition avec la plus petite des puissances qui intervient.

Exemple. On a $1960 = 2^3 \times 5 \times 7^2$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ donc $pgcd(1960, 252) = 2^2 \times 7^1 = 28$.

3.3.2 Plus Petit Commun Multiple de deux entiers naturels

Définition 3.6 *Le PPCM de deux entiers naturels a et b est l'unique entier naturel m, noté $ppcm(a, b)$ vérifiant :*

- *a divise m et b divise m (c'est un multiple commun de a et b),*
- *tout multiple commun de a et b est multiple de m (c'est le "plus petit").*

Exemple. Le plus petit multiple commun à 4 et 6 est 12, ce que l'on écrit $ppcm(4, 6) = 12$. De même, $ppcm(36, 54) = 18$.

Proposition 3.7 *Soient a et b deux entiers naturels* **non nuls**. *Alors :*

$$pgcd(a, b)ppcm(a, b) = ab$$

Première méthode de recherche du PPCM de deux entiers

On s'appuie sur la proposition précédente : on détermine d'abord le PGCD des deux nombres et on en déduit le PPCM par la formule ci-dessus.

Exemple. On a vu que $pgcd(1960, 252) = 28$ donc $ppcm(1960, 252) = \dfrac{1960 \times 252}{28} = 17640$.

Deuxième méthode de recherche du PPCM de deux entiers

On détermine la décomposition en facteurs premiers des deux entiers a et b. Le PPCM de a et b est alors le produit de tous les nombres premiers intervenant dans l'une ou l'autre des deux décompositions avec la plus grande puissance observée.

Exemple. On a $1960 = 2^3 \times 5 \times 7^2$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ donc $ppcm(1960, 252) = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 17640$.