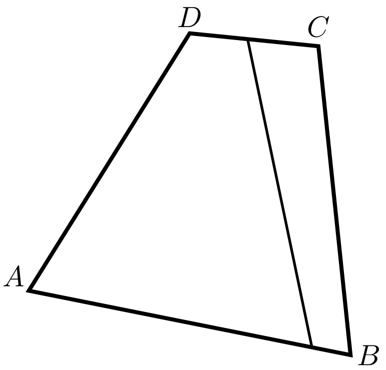
Chapitre 4

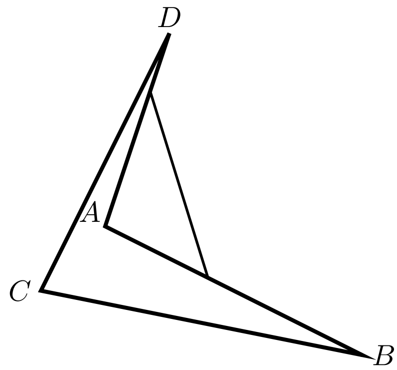
Géométrie 2

4.1 Les quadrilatères usuels

Définition 4.1 *Un quarilatère est la donnée de quatre points tels que trois points consécutifs ne soient pas alignés. Ces points sont appelés sommets. Un quadrilatère est convexe si tout segment joignant deux points quelconques du quadrilatère est à l'intérieur du quadrilatère.*



Convexe

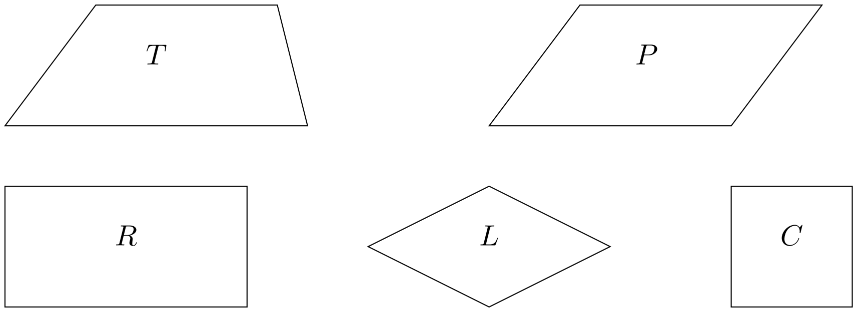


Non convexe

Remarque. Dans un quadrilatère convexe, la somme des angles est égale à 360°.

Définitions 4.2

- *Un* **trapèze** *(T) est un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles. Ces deux côtés sont appelés* **bases***. Les deux autres côtés sont les côtés transversaux.*
- *Un* **parallélogramme** *(P) est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.*
- *Un* **rectangle** *(R) est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires.*
- *Un* **losange** *(L) est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur.*
- *Un* **carré** *(C) est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur.*

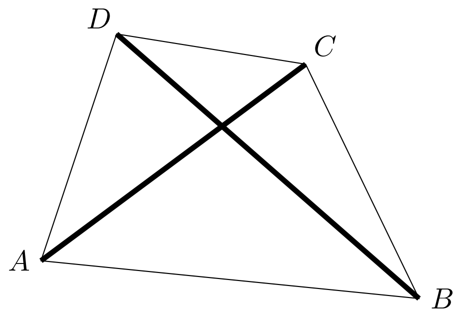


Remarques.

- Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux et les côtés opposés ont même longueur.
- Un parallélogramme est un trapèze (particulier) mais la réciproque n'est pas toujours vraie.
- Un carré est un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange.

4.1.1 Diagonales

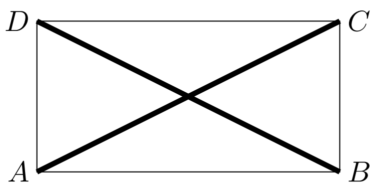
Définition 4.3 *On appelle* **diagonales** *d'un quadrilatère $ABCD$ les deux droites joignant deux sommets opposés (ou encore, par extension, les segments de droites correspondants).*

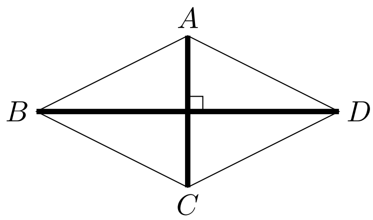


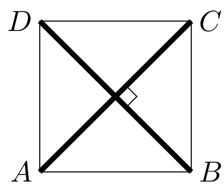
Proposition 4.4 *Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.*

Propriétés.

- Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.
- Un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.
- Un parallélogramme est un carré si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.



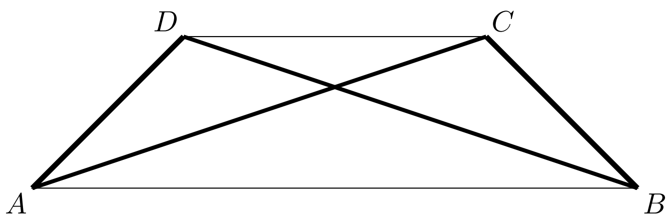




Remarque. Les rectangles et les carrés sont les seuls quadrilatères qui ont quatre angles droits.

Définition 4.5 *Un trapèze est dit isocèle si les angles ayant pour sommets les extrèmités d'une même base sont égaux.*

Proposition 4.6 *Dans un trapèze isocèle, les diagonales ont même longueur et les côtés transversaux ont même longueur.*

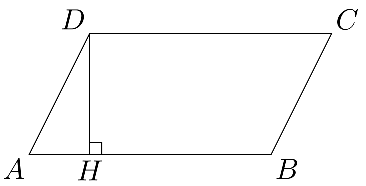


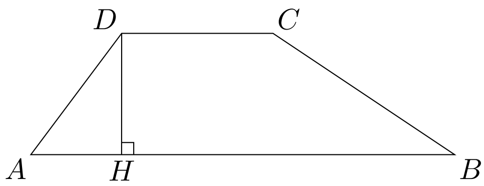
4.1.2 Aire

Définition 4.7 *L'aire d'un rectangle $ABCD$ est par définition $\mathcal{A} = AB \times CD$.*

Proposition 4.8 *Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note H l'intersection de la hauteur issue de A et de la droite (BC) dans le triangle ABC.*

- *Si $ABCD$ est un carré alors son aire est $\mathcal{A} = AB^2$.*
- *Si $ABCD$ est un losange alors son aire est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(AC \times BD)$.*
- *Si $ABCD$ est un parallélogramme alors son aire est $\mathcal{A} = AH \times BC$.*
- *Si $ABCD$ est un trapèze alors son aire est $\mathcal{A} = AH \times \frac{1}{2}(BC + AD)$.*





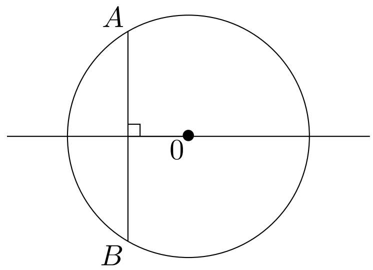
4.2 Le cercle

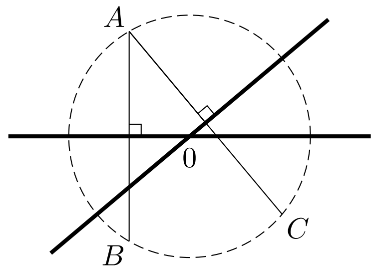
Définitions 4.9 *Soient O un point et r un nombre réel positif. Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points du plan situés à la distance r du point O. On le note $\mathcal{C}(O, r)$. Tout segment joignant deux points distincts du cercle est appelé* **corde**. *Toute corde passant par le centre du cercle est appelé* **diamètre**.

Proposition 4.10 *La circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$. L'aire de la surface intérieure au cercle (disque) est $\mathcal{A} = \pi r^2$.*

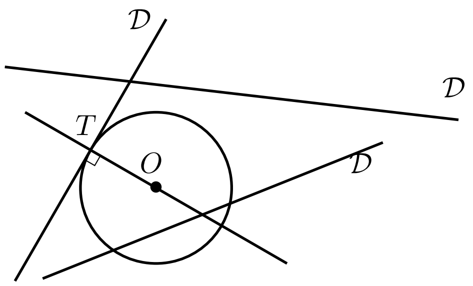
Propriétés.

- La médiatrice d'une corde $[AB]$ d'un cercle passe par le centre de ce cercle.
- Soient A, B, C trois points non alignés. Il existe un et un seul cercle passant par ces trois points. Son centre est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$.

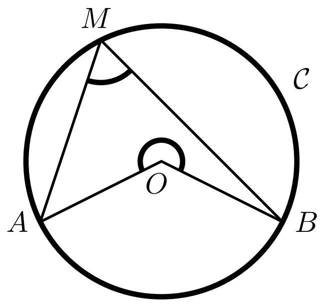




Proposition et Définition 4.11 *Soient un cercle et $\mathcal{D}$ une droite La droite $\mathcal{D}$ coupe le cercle en au plus deux points. Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est réduit à un point T, $\mathcal{D}$ est alors appelée* **tangente** *en T à $\mathcal{C}$ et dans ce cas $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à la droite (OT).*

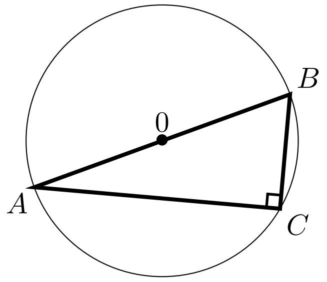


Théorème 4.12 (Théorème de l'angle inscrit) *Soit $\mathcal{C}(0, r)$ un cercle et A et B deux points de $\mathcal{C}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B, on a $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.*



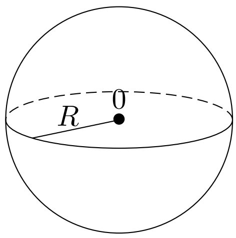
On retrouve ainsi un résultat déjà vu au chapitre 2 :

Corollaire. Tout triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côté est un diamètre de ce cercle est rectangle.



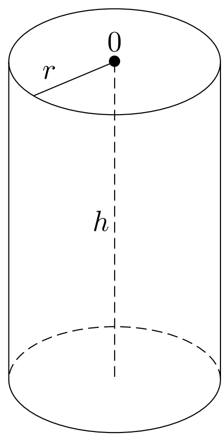
4.3 Aires et volumes de solides usuels

4.3.1 La sphère



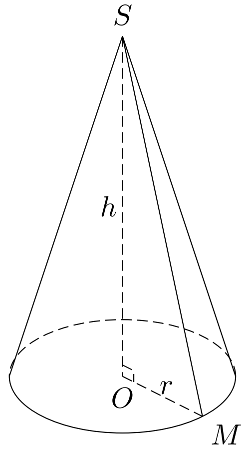
La sphère de rayon R a pour aire $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ et pour volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

4.3.2 Le cylindre de révolution



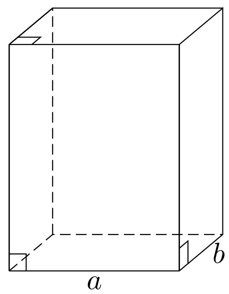
Le cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h a pour aire latérale (disques de base non compris) $\mathcal{A} = 2\pi rh$ et pour volume $\mathcal{V} = \pi r^2 h$

4.3.3 Le cône de révolution



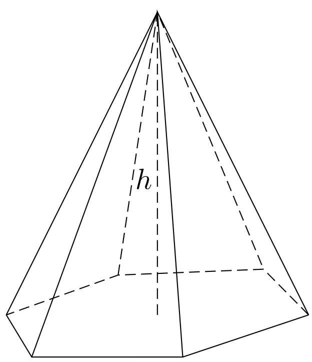
Le cône de révolution de rayon r et de hauteur h a pour aire latérale (disque de base non compris) $\mathcal{A} = \pi r a$ où a est la longueur de la génératrice $[SM]$ et pour volume $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

4.3.4 Le parallélépipède rectangle



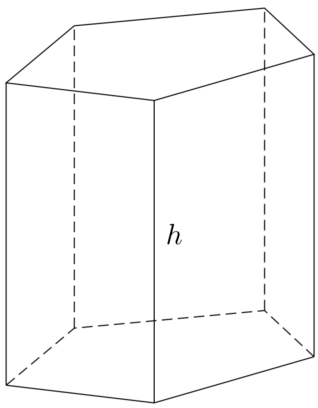
Le parallélépipède rectangle de côtés a, b et c a pour aire totale $\mathcal{A} = 2(ab + bc + ac)$ et pour volume $\mathcal{V} = abc$

4.3.5 La pyramide régulière



La pyramide régulière a pour volume $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire du polygone de base et h la hauteur de la pyramide.

4.3.6 Le prisme droit



Le prisme droit a pour volume $\mathcal{V} = B \times h$ où B est l'aire du polygone de base et h la hauteur du prisme droit.