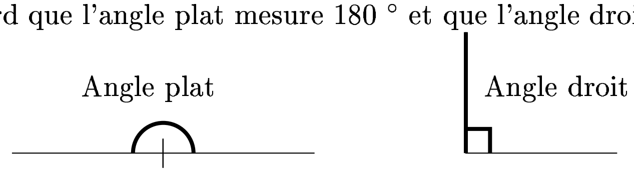
Chapitre 2

Géométrie 1

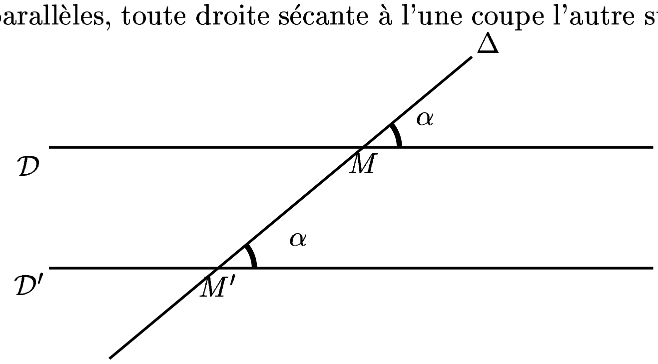
2.1 Rappels sur les angles

Rappelons tout d'abord que l'angle plat mesure 180 ° et que l'angle droit mesure 90°.



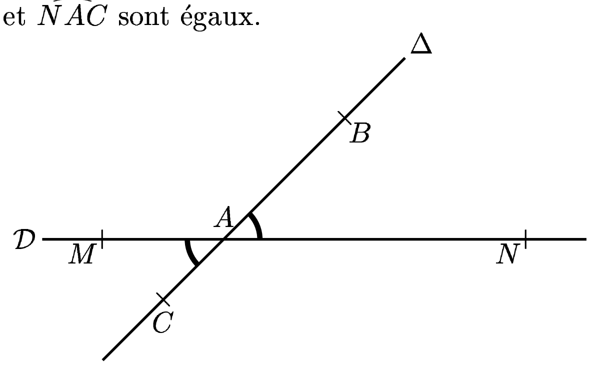
Droites parallèles

Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une coupe l'autre suivant le même angle.



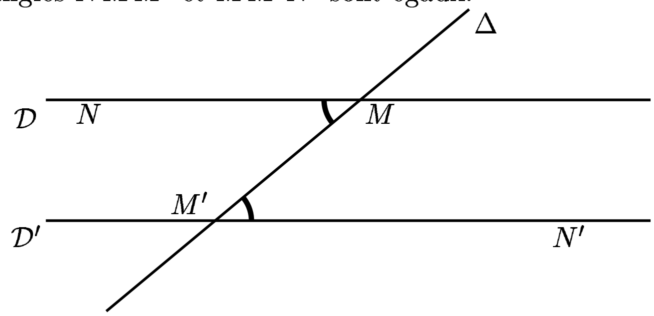
Angles opposés

On se donne deux droites $\mathcal{D}$ et Δ sécantes en un point A, deux points M et N de $\mathcal{D}$ et deux points B et C de Δ comme illustré ci-dessous. Alors les angles $\widehat{NAB}$ et $\widehat{MAC}$ sont égaux. De même, les angles $\widehat{MAB}$ et $\widehat{NAC}$ sont égaux.



Angles alternes-internes

On se donne deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles, Δ une droite coupant $\mathcal{D}$ en M et $\mathcal{D}'$ en M'. N et N' sont respectivement des points de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ situés de part et d'autre de Δ comme illustré ci-dessous. Alors les angles $N\widehat{M}M'$ et $M\widehat{M'}N'$ sont égaux.



Bissectrice

Définition 2.1 *Soient A, B, C trois points non alignés. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est la droite passant par B et "coupant l'angle en deux". Plus précisément, c'est la droite Δ passant par B et telle que pour tout point M de Δ distinct de B, les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MBC}$ soient égaux.*

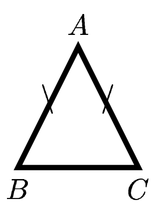
2.2 La géométrie du triangle

2.2.1 Définitions - Triangles particuliers

Définition 2.2 *Un triangle est la donnée de trois points non alignés A, B, C appelés sommets du triangle.*

Propriété à connaître : $\boxed{\text{La somme des angles d'un triangle vaut } 180°.}$

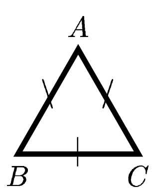
Triangle isocèle



Un triangle est dit *isocèle* si deux de ses côtés ont même longueur.
Si A est le sommet commun à ces deux côtés, on dit que le triangle est isocèle en A.

Propriété : Un triangle est isocèle si et seulement si deux de ses angles ont même mesure.

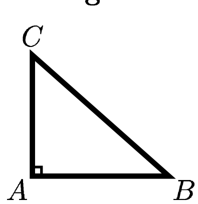
Triangle équilatéral



Un triangle est dit *équilatéral* si ses trois côtés ont même longueur.

Propriété : Un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois angles ont même mesure (Cette mesure est alors de 60°. Pourquoi ?).

Triangle rectangle



Un triangle est dit *rectangle* si l'un de ses angles est droit.
Si A est le sommet de l'angle droit, on dit que le triangle est rectangle en A.
Le côté opposé à l'angle droit est appelé *hypothénuse*.

Théorème 2.3 (Pythagore) *Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés :* $BC^2 = AB^2 + AC^2$

2.2.2 Triangles égaux

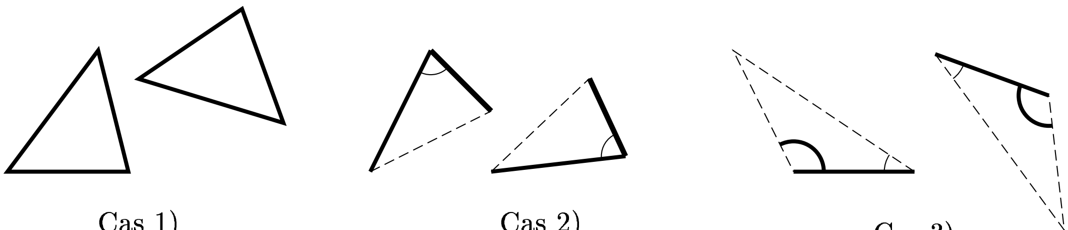
Définition 2.4 *Deux triangles sont dits égaux s'ils sont superposables.*

Théorème 2.5 *Deux triangles sont égaux si et seulement si l'***une** *(au moins) des conditions suivantes est satisfaite :*

1) Leurs côtés sont deux à deux égaux.

2) Deux de leurs côtés sont deux à deux de même longueur et les angles que forment ces deux côtés ont même mesure.

3) Deux de leurs angles ont deux à deux même mesure et les côtés qui joignent ces deux angles ont même longueur.

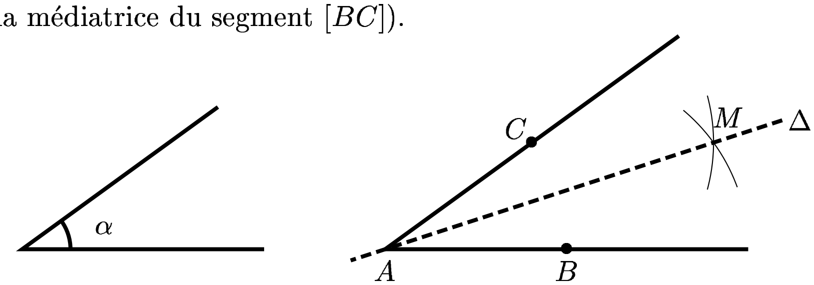


Cas 1) Cas 2) Cas 3)

Remarque. Deux triangles peuvent avoir leurs trois angles deux à deux de même mesure sans qu'ils soient pour autant superposables (penser par exemple à deux triangles équilatéraux).

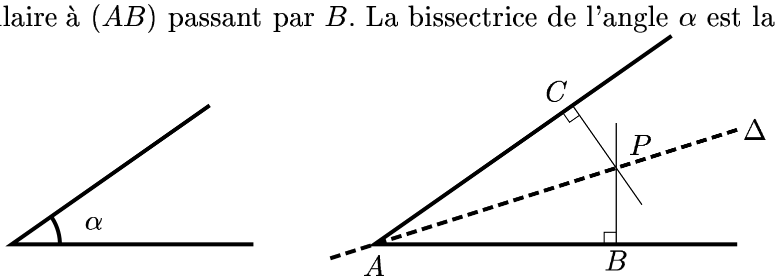
Applications à la construction de la bissectrice d'un angle

1) Etant donné un angle α de sommet A, à l'aide d'un compas on place sur ses côtés deux points B et C tels que $AB = AC$ et, en reportant le compas en B puis en C, on construit le point d'intersection M des arcs de cercles ainsi formés. La bissectrice de l'angle α est la droite (AM) (qui est aussi la médiatrice du segment $[BC]$).



En effet, par construction $AB = AC$, $BM = CM$ et ... $AM = AM$! Les triangles ABM et ACM sont donc égaux et ont par suite les mêmes angles.

2) Etant donné un angle α de sommet A, on place sur ses côtés deux points B et C tels que $AB = AC$ et on construit le point d'intersection de la perpendiculaire à (AC) passant par C et de la perpendiculaire à (AB) passant par B. La bissectrice de l'angle α est la droite (AP).



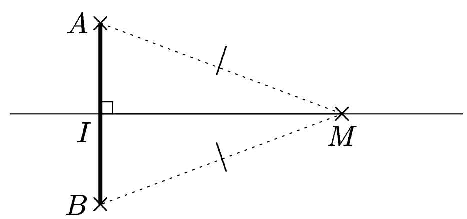
En effet, le théorème de Pythagore montre que $BP^2 = AP^2 - AB^2 = AP^2 - AC^2 = CP^2$. Comme $AC = AB$, les triangles ABP et ACP sont égaux et ont donc les mêmes angles.
Remarques :

- La droite (AP) est en fait la médiatrice du segment $[BC]$
- La réciproque est vraie : tout point de la bissectrice Δ est équidistant des droites (AB) et (AC).

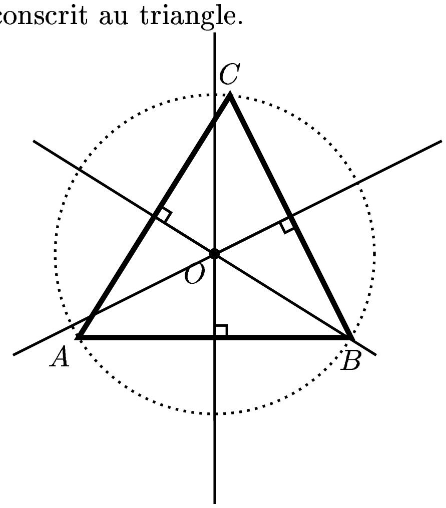
2.2.3 Droites remarquables du triangle

Médiatrices

On appelle *médiatrice* d'un segment $[AB]$ l'ensemble des points situés à égale distance de A et B. La médiatrice de $[AB]$ est en fait la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu I de $[AB]$.

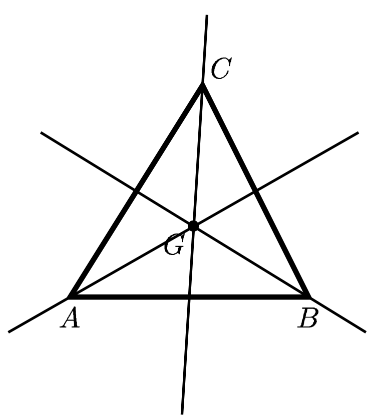


Propriété : Les trois médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



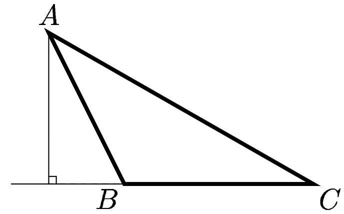
Médianes

On appelle *médiane* d'un côté d'un triangle la droite passant par le milieu de ce côté et le sommet opposé.
Propriété : Les trois médianes des côtés d'un triangle sont concourantes en un point G qui est le centre de gravité du triangle.

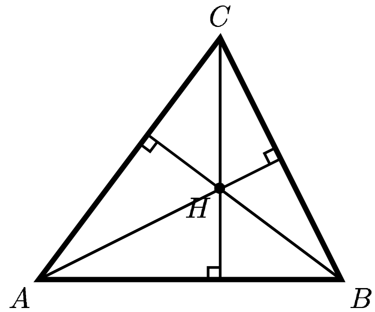


Hauteurs

Dans un triangle ABC, on appelle *hauteur* issue de A la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (BC). Cette hauteur peut fort bien être "extérieure" au triangle ABC :

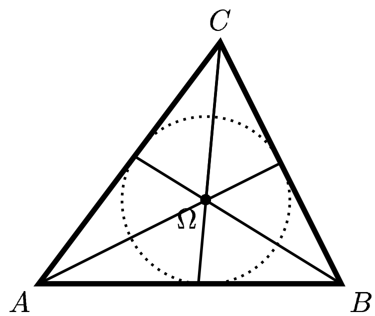


Propriété : Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.



Bissectrices

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point Ω qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



Cas particulier du triangle isocèle

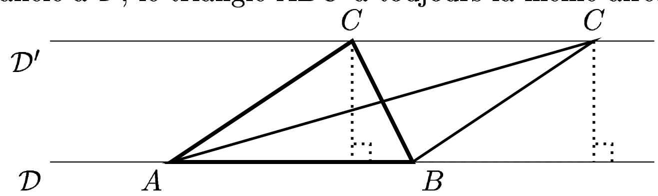
Dans un triangle ABC isocèle en A, la hauteur et la médiane issues de A coïncident avec la médiatrice du segment $[BC]$ mais aussi avec la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$: ces quatres droites sont confondues.

2.2.4 Aire d'un triangle

Soit ABC un triangle. On note H l'intersection de la hauteur issue de A et du segment $[BC]$. L'aire du triangle ABC est alors

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

Remarque. Si on se donne deux points A et B sur une droite $\mathcal{D}$ alors pour tout point C variant sur une droite $\mathcal{D}$' parallèle à $\mathcal{D}$, le triangle ABC a toujours la même aire.



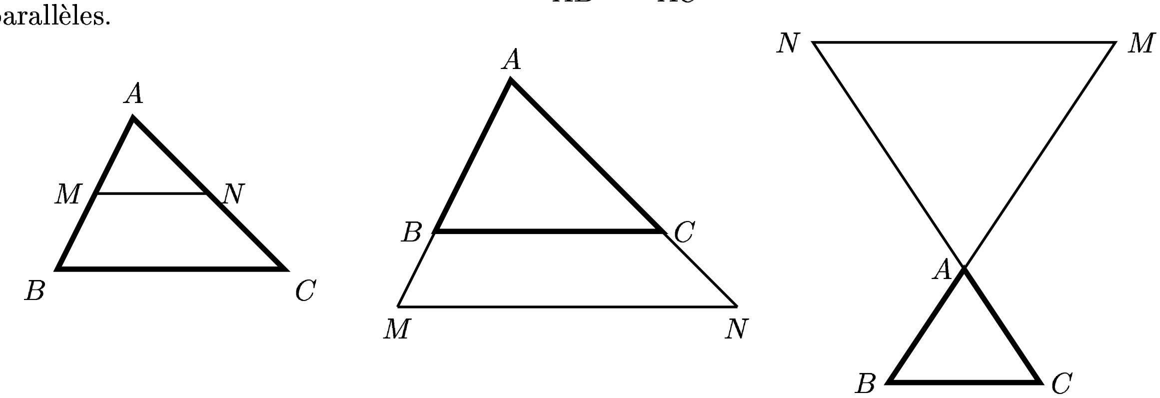
2.3 Le théorème de Thalès

Soient ABC un triangle et $\mathcal{D}$ une droite parallèle à (BC). Notons respectivement M et N les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec les droites (AB) et (AC). Alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

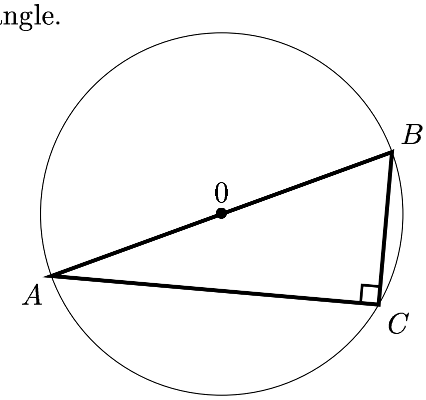
Réciproquement

Soient ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC) comme dans l'une des trois configurations ci-dessous. Si en outre $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



Conséquence. On en déduit la propriété de la droite des milieux dans un triangle : si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté. Cela permet de démontrer la propriété suivante :

Propriété importante. Tout triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côté est un diamètre de ce cercle est rectangle.



Exercice. Démontrer cette propriété en introduisant le milieu I de $[AC]$ et en montrant que (OI) est la médiatrice de $[AC]$.