Université de Rennes 1 **2005-2006**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du Problème n° 3

Partie 1 : Propriétés de la convolution

1) Soient $f, g \in E$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f \star g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du)$ donc $f \star g = g \star f$ et $\star$ est bien commutative.

Soient $f, g, h \in E$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$f \star (g+h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)[g(t)+h(t)]\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)h(t)\,dt$$

donc $f \star (g+h) = f \star g + f \star h$ et la loi est bien distributive par rapport à l'addition.

2)

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0-t)\varphi_n(t)\,dt = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x_0-t)\,dt = \frac{n}{2}\int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0-\frac{1}{n}} f(u)(-du) = g_n(x_0)$.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose f continue en x_0.

$|g_n(x_0) - f(x_0)| = \left|\displaystyle\frac{n}{2}\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \frac{n}{2}\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f(x_0)\,dt\right| \leq \frac{n}{2}\int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} |f(t)-f(x_0)|\,dt$. Soit alors $\varepsilon > 0$. $\exists \eta > 0$, $\forall t \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$, $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$. Donc, $\forall n > \frac{1}{\eta}$, $\forall t \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}]$, $t \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$ et donc $|g_n(x_0)-f(x_0)| \leq \dfrac{n}{2}\varepsilon\dfrac{2}{n} = \varepsilon$.

Partie 2 : Approximation de l'identité

1) On a $\forall n$, $a_n > 0$ et donc les fonctions h_n sont bien positives.

Il est d'autre part clair que $\forall n$, $h_n \in E$ (puisque $\displaystyle\lim_{|t|\to 1} h_n(t) = 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\,dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n\,dt = 1$.

Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $\alpha \geq 1$ alors $\displaystyle\int_{|t|>\alpha} h_n(t)\,dt = 0$. Pour $0 < \alpha < 1$, on a $\displaystyle\int_{|t|>\alpha} h_n(t)\,dt = 2\int_{\alpha}^{1} \frac{1}{a_n}(1-t^2)^n\,dt$. On déduit $\displaystyle\int_{|t|>\alpha} h_n(t)\,dt \leq \frac{2}{a_n}\int_{\alpha}^{1}(1-\alpha^2)^n\,dt = \frac{2(1-\alpha)(1-\alpha^2)^n}{a_n}$.

D'autre part, pour $0 < t < 1$, $0 < t^2 < t$ donc $a_n \geq 2\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \frac{2}{n+1}$ et par suite,

$0 \leq \displaystyle\int_{|t|>\alpha} h_n(t)\,dt \leq (n+1)(1-\alpha^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) Notons $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| > 0$ (le cas où f est constante égale à 0 est sans intérêt). f, continue à support compact, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit alors $\varepsilon > 0$.

$\exists \eta_u > 0$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $|x-x'| \leq \eta_u \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x$, $f \star \varphi_n(x) - f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(t)\,dt$ donc

$$|(f \star \varphi_n - f)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)-f(x)|\,\varphi_n(t)\,dt = \int_{|t|>\eta_u} + \int_{|t|\leq\eta_u}$$

$|(f \star \varphi_n - f)(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}\displaystyle\int_{|t|\leq\eta_u} \varphi_n(t)\,dt + 2M\int_{|t|>\eta_u} \varphi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\int_{|t|>\eta_u} \varphi_n(t)\,dt$. Or $\displaystyle\int_{|t|>\eta_u} \varphi_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc, pour $n \geq N_0$, $\displaystyle\int_{|t|>\eta_u} \varphi_n(t)\,dt \leq \frac{\varepsilon}{4M}$. Finalement,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |(f \star \varphi_n - f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Partie 3 : Théorème de Weierstrass

1) Notons $X_k : x \mapsto x^k$. Alors $\forall x$, $X_k \star f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-t)^k f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^{k-i} f(t)\,dt\right) x^i$ donc $X_k \star f$ est un polynôme.

h_n (en restriction à $[-1,1]$) étant un polynôme, la distributivité de $\star$ par rapport à l'addition montre alors que $f \star h_n = h_n \star f$ est, en restriction à $[-1,1]$, un polynôme.

2) Posons $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)$. g est continue sur $[-1,1]$ donc la suite $(g \star h_n)$ converge uniformément vers g sur $[-1,1]$. Notons, pour n dans $\mathbb{N}$, $P_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'application polynomiale définie par : $\forall t \in [a,b]$, $P_n(t) = g \star h_n\left(\frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}\right)$. Comme les applications $[-1,1] \to [a,b]$, $x \mapsto \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$ et $[a,b] \to [-1,1]$, $t \mapsto \frac{2}{b-a}t - \frac{a+b}{b-a}$ sont bijectives, réciproques l'une de l'autre, on a, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\|P_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |P_n(t) - f(t)| = \sup_{x \in [-1,1]} |g \star h_n(x) - g(x)| = \|g \star h_n - g\|_\infty$$

Le résultat en découle.