Université de Rennes 1 **2005-2006**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème n° 2

A rendre pour le jeudi 6 octobre 2005

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application périodique, de période 1, donnée par

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 4^{-n} f_0(4^n x)$.

$\boxed{\text{Partie 1 : Continuité de la fonction } f}$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$.

2) En déduire que la série de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Partie 2 : Non dérivabilité de } f}$

1) Soient $x_0 > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $]4^{n-1}x_0 + \frac{\varepsilon}{4}, 4^{n-1}x_0[$ ne contienne aucun élément de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

b) Pour cette valeur de ε fixée, on note, pour tout p de $\mathbb{N}$, $\tau_{n,p,\varepsilon} = \dfrac{f_p(x_0 + \varepsilon 4^{-n}) - f_p(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}}$.

Montrer que $|\tau_{n,p,\varepsilon}| = \begin{cases} 0 \text{ si } p \geq n \\ 1 \text{ si } p \in \{0, \cdots, n-1\} \end{cases}$.

c) On note $\tau_n = \dfrac{f(x_0 + \varepsilon 4^{-n}) - f(x_0)}{\varepsilon 4^{-n}}$. Montrer que τ_n est un entier relatif de même parité que n. En déduire que la suite (τ_n) diverge.

2) Conclure que la fonction f n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$.

On vient donc d'exhiber une fonction f, continue en tout point de $\mathbb{R}$ mais . . . dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$ ...