CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du Problème n° 1

Partie 1 : Formule de Wallis

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout t de $[0, \pi/2]$, e $0 \leq \sin t \leq 1$ et donc $0 \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$. On en déduit par intégration de 0 à $\pi/2$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante et minorée par 0.

2) Soit $n \geq 2$. $u : t \mapsto -\cos t$ et $v : t \mapsto \sin^{n-1} t$ sont de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc d'après le théorème d'intégration par parties :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \sin^{n-1} t \, dt = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t \, dt$$

On en déduit $I_n = (n-1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t \, dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. Il en découle effectivement la relation : $\forall n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Calcul de I_{2n} : La relation précédente donne $2nI_{2n} = (2n-1)I_{2(n-1)}$.
On en déduit $I_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} \dfrac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \dfrac{3}{4} \dfrac{1}{2} I_0$. Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on a finalement

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1}{2^n n!} \frac{\pi}{2} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 3.2.1}{2^n n! [2n][2n-2]\cdots[4][2]} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Calcul de I_{2n+1} : La même relation donne ici $I_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} I_{2(n-1)+1} = \dfrac{2n}{2n+1} \dfrac{2(n-1)}{2n-1} \cdots \dfrac{4}{5} \dfrac{2}{3} I_1$. Or $I_1 = 1$. Donc $I_{2n+1} = \dfrac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ (valable si $n = 0$).

3) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ et donc $0 < \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, c'est-à-dire $I_{n+1} \underset{n \to \infty}{\sim} I_n$.

4) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2} \dfrac{1}{2n+1} \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n)!^2} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{2n}{2n+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$, on obtient bien $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n)!^2} = \pi$ (puisque $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{2n+1} = 1$).

Partie 2 : Formule de Stirling

1) Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (n + \tfrac{3}{2})\ell n\,(n+1) - n - 1 - \ell n\,(n+1)! - (n + \tfrac{1}{2})\ell n\, n + n + \ell n\, n! \\ &= (n + \tfrac{1}{2})\ell n\,(1 + \tfrac{1}{n}) - 1 = (n + \tfrac{1}{2}) \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + \tfrac{1}{3n^3} + \tfrac{1}{n^3}\varepsilon(n) \right) - 1 \\ &= \tfrac{1}{12n^2} + \tfrac{1}{n^2}\varepsilon(n) \end{aligned}$$

On a donc $S_{n+1} - S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
On sait que la série $\sum(S_{n+1} - S_n)$ a la même nature que la suite (S_n). Puisque la série $\sum(S_{n+1} - S_n)$ est

convergente (par comparaison avec une série de Riemann), il en est de même de la suite (S_n). On pose $\lambda = \lim_{n\to\infty} S_n$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $S_n = \ell n\left(n^{n+1/2}e^{-n}\frac{1}{n!}\right) = \ell n\left(\dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}\right)$. D'après ce qui précède, on peut donc écrire $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} = e^\lambda$ et donc $n^n e^{-n}\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} e^\lambda n!$

3) L'égalité précédente donne $n! \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\lambda}n^n e^{-n}\sqrt{n}$ et donc aussi $(2n)! \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\lambda}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}$.
On en déduit $\dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n(2n)!^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2^{4n}e^{-4\lambda}n^{4n}e^{-4n}n^2}{ne^{-2\lambda}(2n)^{4n}e^{-4n}(2n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{e^{-2\lambda}}{2}$. Puisque : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{4n}n!^4}{n(2n)!^2} = \pi$, on trouve $\dfrac{e^{-2\lambda}}{2} = \pi$ et donc $\lambda = -\frac{1}{2}\ell n\,(2\pi)$.
Comme $e^{-\lambda} = \sqrt{2\pi}$, le résultat $n! \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\lambda}n^n e^{-n}\sqrt{n}$ devient $n! \underset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Partie 3 : Amélioration de la formule de Stirling

1) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Il existe donc un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait : $|u_n - v_n| \leq \varepsilon v_n$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$:

$$|R_n - T_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_n - v_n)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|u_n - v_n| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} v_n = \varepsilon T_n$$

Ce résultat signifie bien que $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} T_n$.

2) Supposons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Ainsi :

$$R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n}$$

3) On a bien $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$. On en déduit $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Mais :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} 12(S_k - S_{k-1}) = 12\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}(S_k - S_{k-1}) = 12\lim_{m\to\infty}(S_m - S_n) = 12(\lambda - S_n)$$

Ainsi $12(\lambda - S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et donc $\lambda - S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\lambda - S_n = \ell n\left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}\right) = \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)$.
On en déduit $\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \exp\left(\dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)\right) = 1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{n}\varepsilon(n)$. Autrement dit :

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n)\right)$$

Remarque : S'il est possible de composer des développements limités (égalités), c'est un jeu beaucoup plus dangereux avec les équivalents. Ainsi, il est clair que $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n$ mais pourtant $e^{n+1} \underset{n\to\infty}{\not\sim} e^n$ (le quotient de ces deux quantités est constant égal à e) ...