Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème n° 1

A rendre pour le jeudi 22 septembre 2005

Partie 1 : Formule de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

1) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée.

2) Soit $n \geq 2$. Montrer que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

3) Prouver que $I_{n+1} \sim I_n$ quand $n \to \infty$.

4) En déduire la formule de Wallis : $\pi = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n.(2n!)^2}$.

Partie 2 : Formule de Stirling

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = (n + \frac{1}{2})\ell n\, n - n - \ell n\,(n!)$

1) Montrer que $S_{n+1} - S_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la suite (S_n) converge vers un réel λ.

2) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, $n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim e^{\lambda} n!$

3) A l'aide de la première partie, montrer que $\lambda = -\frac{1}{2}\ell n\,(2\pi)$. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to\infty}{\simeq} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Partie 3 : Amélioration de la formule de Stirling

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs, convergentes. Pour tout entier n, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

1) On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que $R_n \sim T_n$ (théorème de sommation des équivalents).

2) En déduire que si $u_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n^2}$ alors $R_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{1}{n}$.

3) Appliquer ce qui précède à $u_n = 12(S_n - S_{n-1})$ et montrer que $\lambda - S_n \underset{n\to\infty}{\simeq} \dfrac{1}{12n}$.

4) En déduire finalement que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{n}\,\varepsilon(n)\right)$ avec $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.