Chapitre 4

Dérivation

4.1 Dérivées

4.1.1 Fonction dérivable en un point

Proposition et Définition 4.1. *Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, est dite **dérivable en** x_0 s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1) $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a pour limite ℓ quand x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$.*

2) $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *a pour limite ℓ quand h tend vers 0 avec $h \neq 0$.*

3) Il existe une fonction φ telle que $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\ell + h\varphi(h).$$

*Le nombre ℓ de ces propriétés est alors appelé **le nombre dérivé de f en** x_0.*

Démonstration : La différence entre les propriétés 1) et 2) n'est qu'une question d'écriture : on pose $h = x - x_0$. On voit que les propriétés 2) et 3) disent la même chose en écrivant, pour $h \neq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h).$$

□

Remarque. Lorsqu'il existe, le nombre dérivé de f en x_0 est noté $f'(x_0)$.

Proposition 4.2. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Ceci se voit immédiatement avec la propriété 3. Par contre, UNE FONCTION CONTINUE (en x_0) N'EST PAS OBLIGATOIREMENT DÉRIVABLE (en x_0) : ainsi $x \longmapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable.

Remarques.

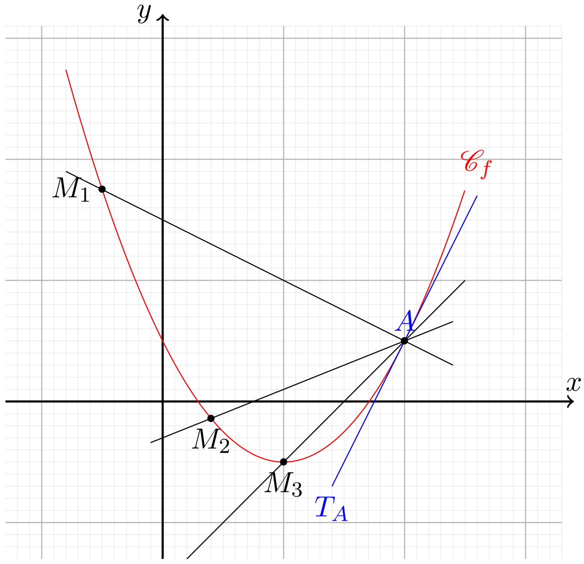
- Si $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 avec $h > 0$ (resp. $h < 0$), alors cette limite est appelée ***dérivée à droite*** (resp. ***à gauche***) de f en x_0. Si f a une dérivée à droite et à gauche en x_0, et qu'elles sont égales, alors f est dérivable en x_0 et sa dérivée en x_0 est la valeur commune.
- On peut aussi parler de la dérivée à gauche (resp. à droite) de f en x_0 quand f est définie sur un intervalle $]a, x_0]$ (resp. $[x_0, b[$).

Exercice. 1) Que valent les dérivées à gauche et à droite de $x \mapsto |x|$ en 0 ?

2) Soit la fonction f définie par $f(x) = x$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = x^3 + x$ pour $x \leqslant 0$. Quelles sont ses dérivées à gauche et à droite en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ?

Interprétation géométrique

Dans le plan muni d'un repère, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'est autre que le coefficient directeur de la droite (AM) où $A(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$. Dire que f est dérivable en x_0 revient donc à dire que la droite (AM) a une position limite lorsque M tend vers A (c'est-à-dire x tend vers x_0). Cette droite limite est appelée la ***tangente*** au graphe de f en x_0. C'est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (elle passe par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et a pour pente le nombre dérivé $f'(x_0)$).



Interprétation cinématique

Si $f(t)$ désigne la distance parcourue par un mobile à l'instant t, la vitesse moyenne de ce mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ n'est autre que l'accroissement $\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$. Si elle existe, la limite de cette vitesse lorsque l'intervalle de temps tend vers 0 (c'est-à-dire h tend vers 0) est appelée ***vitesse instantanée*** du mobile à l'instant t_0. Cette vitesse instantanée vaut donc $f'(t_0)$.

4.1.2 Fonction dérivée, dérivées successives

Soit D un intervalle ouvert, ou une réunion d'intervalles ouverts. Si la fonction à valeurs réelles f est définie et dérivable en tout point de D, on note f' la fonction qui à tout réel x de D associe le nombre dérivé de f en x. C'est la ***fonction dérivée de f.***

On utilise aussi une autre notation (la notation de Leibniz) : $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dfrac{d}{dx}(f)$ pour f' (où x est le nom de la variable). Par exemple, on écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+x^2+1}\right) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2+1}}.$$

Si f' admet elle-même une dérivée sur D, on note f'' cette dérivée et on l'appelle ***dérivée seconde*** de f. Par récurrence on définit la dérivée n-ème, que l'on note $f^{(n)}$.

On a $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$. En notation de Leibniz, on écrit $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Remarque. On dit que f est dérivable sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) si f est dérivable sur $]a, b[$ et si f est dérivable à droite en a (resp. à gauche en b).

4 ANALYSE

* *Art. 1.* viendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la conſtante a,*elle demeurera la même a : de ſorte que la quantité propoſée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & ſa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $dx+dy-dz$. Il en eſt ainſi des autres ; ce qui donne cette régle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou ſouſtraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité propoſée, & retenant les mêmes ſignes, on en compoſera une autre quantité qui ſera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui eſt le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & ſa différence ſera ydx * *Art. 2.* $+xdy+dxdy$, c'eſt-à-dire* $ydx+xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car ſi l'on diviſe par exemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

2°. La différence de xyz eſt $yzdx+xzdy+xydz$. Car en conſidérant le produit xy comme une ſeule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de ſa différence $ydx+xdy$ par la ſeconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

Une page de l'*Analyse des infiniments petits...* de G. de L'Hospital (1696). On y voit établir la règle de dérivation d'un produit.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), philosophe et mathématicien, est considéré comme l'un des inventeurs, avec Isaac Newton (1642-1727), du calcul infinitésimal ; une polémique sur la paternité de cette invention les opposa. Leibniz voit *df* et *dx* comme des *"infiniments petits"* ; l'usage de ces quantités infiniment petites au statut difficile à préciser soulève des objections. Dans l'Encyclopédie, d'Alembert explique que le calcul différentiel ne suppose pas nécessairement l'existence de ces quantités, et que ce calcul ne consiste qu'à déterminer la limite d'un rapport (le formalisme des ε-δ pour les limites ne viendra que plus tard, au 19ème siècle). Il place ce point de vue dans la ligne de Newton et de son "calcul des fluxions". L'approche de Newton est plus cinématique, et sa notation $\dot{x}$ est encore parfois utilisée dans cette discipline, pour désigner la dérivée de x par rapport au temps. Quant à la notation f' pour la dérivée de f, son usage remonte à Lagrange (1736-1813).

4.1.3 Dérivation et opérations sur les fonctions

On rappelle ici les résultats établis en AN1.

Proposition 4.3. *On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle ouvert contenant x_0. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :*

- *$f+g$ est dérivable en x_0 et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est dérivable en x_0 et on a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$*
- *fg est dérivable en x_0 et on a $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$*
- *Si $n \in \mathbb{N}$, f^n est dérivable en x_0 et on a $(f^n)'(x_0) = nf'(x_0)f^{n-1}(x_0)$*
- *Si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et on a $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$*
- *Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en x_0 et on a $\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$*

Les deux premières règles disent que la dérivation est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur D dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur D. La règle de dérivation d'un produit est démontrée dans le cours de Mathématiques AN1. Il est intéressant de comparer cette démonstration à l'argument donné par L'Hospital dans le texte reproduit en illustration. L'auteur ne parle pas de fonctions f et g, mais de « quantités » x et y (on ne voit plus la variable). Il utilise la « différence » dx de x, qui est pensée comme un accroissement infiniment petit de x.

Exercice. Retrouver la démonstration de la règle de dérivation de $1/f$. On suppose que $f(x_0) \neq 0$. On utilise l'égalité

$$\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\,f(x_0)} .$$

Il faut évidemment bien connaître les dérivées des fonctions usuelles. Une règle importante (et qu'il faut savoir utiliser correctement) est celle de la dérivation des fonctions composées.

Proposition 4.4. *Si f est dérivable en x_0, et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0, et sa dérivée est*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Remarque. En notation de Leibniz, ceci s'écrit agréablement : si g est fonction de f et f est fonction de x, alors

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}.$$

Mais il faut bien réaliser ce que ceci veut dire. Par exemple, supposons que l'on ait à calculer la dérivée de $y = \ln(2 + \cos\sqrt{1+x^2})$. On peut décomposer notre fonction compliquée et poser $w = 1 + x^2$, $v = \sqrt{w}$, $u = 2 + \cos v$, $y = \ln u$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{1}{u} \times (-\sin v) \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{w}} \times \cancel{2}x \\ &= \frac{-x\sin\sqrt{1+x^2}}{(2+\cos\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Démonstration :
• Il serait tentant d'écrire $\dfrac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{g[f(x)]-g[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)}.\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ et de conclure, en utilisant la limite d'une composée, que ce taux d'accroissement tend vers $g'[f(x_0)].f'(x_0)$. Mais il y a une faille dans le raisonnement : rien n'assure que $f(x)-f(x_0)$ soit non nul sur un voisinage de x_0...
• Utilisons plutôt la caractérisation de la dérivée à l'aide des développements limités (point 3) de la définition). f étant dérivable en x_0, on peut considérer une fonction φ telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ et $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varphi(h)$. De même, g étant dérivable en $y_0=f(x_0)$, on peut considérer une fonction ψ telle que $\lim\limits_{k\to 0}\psi(k)=0$ et $g(y_0+k)=g(y_0)+kg'(y_0)+k\psi(k)$. On a alors $g\circ f(x_0+h)=g[f(x_0)+hf'(x_0)+h\varphi(h)]=g[y_0+h(f'(x_0)+\varphi(h))]$. En considérant $k=h(f'(x_0)+\varphi(h))$ on a donc $g\circ f(x_0+h)=g(y_0)+kg'(y_0)+k\psi(k)$ soit :

$$\begin{aligned}
g\circ f(x_0+h) &= g(y_0)+h(f'(x_0)+\varphi(h))g'(y_0)+h(f'(x_0)+\varphi(h))\psi(h(f'(x_0)+\varphi(h)))\\
&= g(y_0)+hf'(x_0)g'(y_0)+h\left[\varphi(h)g'(y_0)+(f'(x_0)+\varphi(h))\psi(h(f'(x_0)+\varphi(h))\right]\\
&= g(y_0)+hf'(x_0)g'(y_0)+h\alpha(h)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha(h)=\varphi(h)g'(y_0)+(f'(x_0)+\varphi(h))\psi(h(f'(x_0)+\varphi(h))$.
Comme $k=h(f'(x_0)+\varphi(h))\xrightarrow[h\to 0]{}0$, le théorème de composition des limites donne $\psi(h(f'(x_0)+\varphi(h)))\xrightarrow[h\to 0]{}0$ et donc $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. Le point 3) de la définition assure alors que $g\circ f$ est dérivable en x_0 et que $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\times f'(x_0)$. □

Remarque. L'application des règles de calcul sur la dérivation est entièrement mécanique, et elle est effectivement mécanisée dans les logiciels de calcul formel. Refaisons par exemple notre dernier calcul à l'aide du logiciel MAPLE.

```
> y:=ln(2+cos(sqrt(1+x^2))) : diff(y,x) ;


                              2 1/2
                       sin((1 + x )   ) x
                - ----------------------------------
                          2 1/2                2 1/2
                  (1 + x )    (2 + cos((1 + x )   ))
```

La dérivée des fonctions réciproques se calcule grâce au résultat suivant.

Proposition 4.5. *Soit f une fonction réelle strictement monotone sur $]a,b[$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors f a une fonction réciproque f^{-1} de $f(]a,b[)$ sur $]a,b[$. Soit $x_0\in]a,b[$, et posons $y_0=f(x_0)$. Si $f'(x_0)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration : La première partie de la proposition a été vue pour les fonctions continues strictement monotones sur un intervalle, et on sait que f^{-1} est continue (théorème 3.31). Etudions la dérivabilité de f^{-1} en y_0. On a, pour $y\neq y_0$:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{(f^{-1}[(y)]f(x)])-f^{-1}[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

où x est l'unique réel tel que $y=f(x)$. Comme $x\neq x_0$ (car $y\neq y_0$ et f est injective),

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Or $x = f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0 = f^{-1}(y_0)$ (car f^{-1} est continue) donc, par le théorème de composition des limites, $\displaystyle\lim_{y \to y_0,\ y \neq y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Du point de vue graphique, la tangente au graphe de f^{-1} au point (y_0, x_0) est la symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ de la tangente au graphe de f au point de coordonnées (x_0, y_0). Les pentes de ces droites sont inverses l'une de l'autre.

Rappelons ici les dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques, que l'on obtient en appliquant la proposition précédente.

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \qquad \operatorname{argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
\arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \qquad \operatorname{argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & \qquad \operatorname{argth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

4.2 Accroissements finis

4.2.1 Extremum local

On dit qu'une fonction réelle f présente un ***maximum local*** (resp. ***minimum local***) en un point x_0 de son domaine de définition s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que, pour tout x de I on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$). Un ***extremum*** est un maximum ou un minimum.

Proposition 4.6. *Supposons f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, et dérivable en x_0. Si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Autrement dit, l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local. Est ce que c'est une condition suffisante ? (On pourra penser à $f : x \mapsto x^3$ en 0). Remarquer aussi qu'on se place à l'intérieur d'un intervalle ouvert où f est définie : une fonction définie sur un segment $[a, b]$ peut avoir un maximum en b, sans que sa dérivée à gauche en b soit nulle.

Démonstration : Si f a un maximum local en x_0, alors par passage à la limite dans les inégalités on a

$$\lim_{h \to 0,\ h > 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0,\ h < 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Comme les deux limites sont égales à $f'(x_0)$, on a $f'(x_0) = 0$. □

Remarque. Lorsque $f'(x_0) = 0$, on dit que x_0 est un ***point critique*** de f.

4.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 4.7 (Théorème de Rolle)**.** *Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$). Si $f(a) = f(b)$, alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration : On pose $M = \sup_{[a,b]} f$ et $m = \inf_{[a,b]} f$. Ces bornes existent et sont atteintes par f puisque f est continue sur le segment $[a, b]$. Si $m = M$, c'est que f est constante sur $[a, b]$, et donc sa dérivée est partout nulle sur $]a, b[$. Sinon, on a par exemple $M \neq f(a)$. Soit alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$ (on ne peut pas avoir $c = a$ ou $c = b$). Alors f présente un maximum (local) en c et donc d'après la proposition 4.6 on a $f'(c) = 0$. □

Michel Rolle (1652-1719) était intéressé par le problème de la séparation des racines d'une équation algébrique ; le résultat dit que deux racines d'un polynôme sont séparées par une racine de la dérivée. Rolle est aussi connu pour son opposition à l'usage des infiniment petits de Leibniz.

Voyons un exemple d'utilisation du théorème de Rolle, pour majorer une erreur d'interpolation. Quand il n'y avait pas encore de calculatrices, on lisait les valeurs des fonctions trigonométriques dans des tables. Par exemple, la table des sinus en radians donnait

$$\begin{array}{l|ll} 0,375 & 0,366\,272\,5 & \pm 0,5\ 10^{-7} \\ 0,376 & 0,367\,202\,9 & \pm 0,5\ 10^{-7} \end{array}$$

Par interpolation linéaire on obtient $\sin(0,3755) = 0,366\,737\,7$ qui est la moyenne des deux valeurs indiquées. De combien de décimales est-on sûr ? L'interpolation linéaire consiste à remplacer sur le segment $[a,b]$ la fonction f par la fonction affine dont le graphe est la droite qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. C'est la fonction φ donnée par

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a).$$

Choisissons $c \in]a,b[$. L'erreur d'interpolation en c est $|f(c) - \varphi(c)|$. Posons

$$g(x) = f(x) - \varphi(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} (f(c) - \varphi(c)).$$

On constate que $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. On suppose f dérivable autant de fois que l'on veut sur $[a,b]$, et alors g l'est aussi. On peut appliquer le théorème de Rolle aux deux segments $[a,c]$ et $[c,b]$. La dérivée g' s'annule en $a_1 \in]a,c[$ et en $b_1 \in]c,b[$. On applique de nouveau le théorème de Rolle à g' sur $[a_1, b_1]$, et on trouve $d \in]a_1, b_1[$ tel que

$$0 = g''(d) = f''(d) - \frac{2}{(c-a)(c-b)} (f(c) - \varphi(c))$$

(vérifiez le calcul de la dérivée seconde). Si on pose $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} (|f''(x)|)$, on a la majoration

$$|f(c) - \varphi(c)| \leqslant \frac{|c-a|\,|c-b|}{2} M.$$

Une étude de la variation de $|c-a|\,|b-c|$ quand c parcourt $[a,b]$ montre que le maximum est atteint pour $c = (a+b)/2$ et vaut $(b-a)^2/4$ (faire cette étude). On obtient finalement comme majoration de l'erreur d'interpolation

$$|f(c) - \varphi(c)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} M.$$

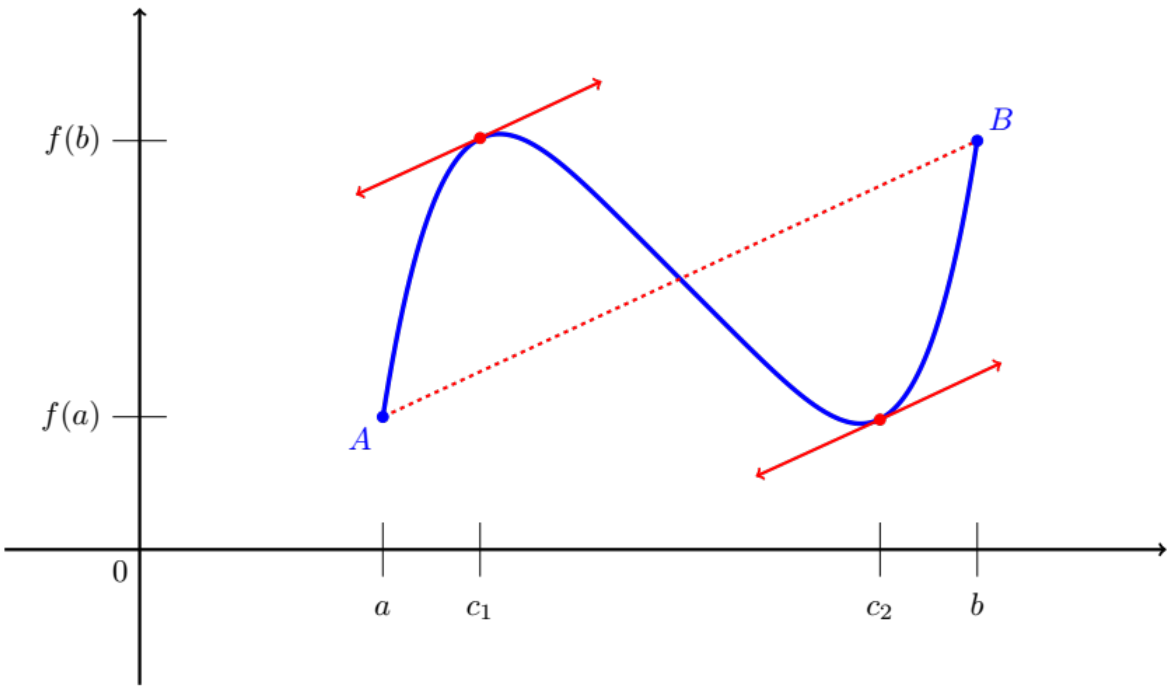
Dans l'exemple de la table des sinus on a $b - a = 10^{-3}$, et la dérivée seconde qui est $-\sin$ est majorée en valeur absolue par $0,4$ sur l'intervalle considéré. L'erreur d'interpolation est majorée par $0,5\ 10^{-7}$. Avec les erreurs d'arrondi, le résultat est bon à 10^{-7} près. La table est faite pour que le nombre de décimales données corresponde à la précision obtenue par interpolation linéaire.

4.2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 4.8 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (avec $a < b$).*
Il existe alors un c appartenant à $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Remarques.

- On a aussi $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$. Peu importe donc l'ordre dans lequel on prend les bornes de l'intervalle.
- D'un point de vue graphique, le théorème des accroissements finis dit qu'il existe au moins un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que la pente de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(c, f(c))$ soit égale à la pente de la droite qui joint les points A et B de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ c'est-à-dire un point de la courbe en lequel la tangente est parallèle à la corde (AB).



Démonstration : Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Cette fonction g est la différence entre f et la fonction affine qui vaut $f(a)$ en a et $f(b)$ en b. g est continue sur $[a, b]$, et elle est dérivable sur $]a, b[$ (comme différence de telles fonctions). Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in]a, b[\quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On a de plus $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g, ce qui assure l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{soit finalement} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Le théorème des accroissements finis justifie l'utilisation du signe de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction :

Proposition 4.9 (Lien entre dérivation et variations). *Si f est continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I, et si f' est positive (resp. négative) à l'intérieur de I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Démonstration : Si on prend a et b dans I avec $a < b$, l'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ avec $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entraîne que $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$). □

Comme conséquence du théorème des accroissements finis, on a aussi le fait que si $f' = 0$ sur un intervalle I, alors f est constante sur I.

Remarque. Le mot intervalle dans la proposition précédente est essentiel. Ainsi, $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Néanmoins, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque par exemple $-1 \leqslant 1$ et pourtant $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1} \ldots$

Dans le théorème des accroissements finis, rien n'est dit sur le c, à part qu'il se situe dans l'intervalle $]a, b[$. Le théorème des accroissements finis est utile principalement quand on peut encadrer la dérivée f'.

Théorème 4.10 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. Supposons que l'on ait deux réels m et M tels que, pour tout x à l'intérieur de I, les inégalités $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ soient vérifiées. Alors, quels que soient les réels a et b de I, avec $a < b$, on a*

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

En prenant les bornes dans l'autre sens, on a bien sûr $M(a-b) \leqslant f(a) - f(b) \leqslant m(a-b)$.

Remarque. Si la fonction f a une dérivée continue sur le segment $[a, b]$ (dans la terminologie que l'on introduira plus loin, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$), alors on peut prendre pour M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) de f' sur $[a, b]$.

Démonstration : On sait d'après le théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, et par hypothèse on a $m \leqslant f'(c) \leqslant M$. Le résultat annoncé découle alors du fait que $b - a \geqslant 0$. □

Conséquence. Si f est dérivable sur l'intervalle I et si f' est bornée sur I : $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K$ alors :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$$

On dit alors que f est ***lipschitzienne de rapport*** K (ou encore K***-lipschitzienne***) sur I. Lorsqu'il existe un tel K et qu'en outre $K < 1$, on dit que f est ***contractante*** sur I.

Exemple. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est contractante sur $[1, +\infty[$. En effet f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On a donc :

$$\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

Exercice. Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

On peut généraliser le théorème des accroissements finis de la manière suivante.

Proposition 4.11. *Soient f et g deux fonctions réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ (où $a < b$). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Si on suppose que $g(a) \neq g(b)$ et que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, ceci veut dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Remarque. En prenant $g : x \longmapsto x$, on retrouve le théorème des accroissements finis : il s'agit bien d'une généralisation.

Démonstration : Pour $x \in I$, on pose :

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

h est alors une fonction continue (car dérivable) sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Comme de plus $h(a) = h(b) = 0$, le théorème de Rolle assure l'existence d'un c de $]a, b[$ pour lequel $h'(c) = 0$. Cela se traduit bien par l'égalité $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$. $\square$

La proposition 4.11 nous permet de démontrer la règle de l'Hospital, un outil que vous avez utilisé au premier semestre (en AN1) pour trouver la limite de certaines « formes indéterminées » $\frac{0}{0}$.

Dans l'énoncé qui suit, $I \setminus \{a\}$ est une notation pour « l'intervalle I privé du point a ».

Proposition 4.12 (Régle de l'Hospital)**.** *On suppose que les fonctions réelles f et g sont définies et continues sur un intervalle I contenant a, et que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose aussi que f et g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$, et que ni g ni g' ne s'annulent sur $I \setminus \{a\}$. Si*

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

alors

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

Guillaume de l'Hospital (1661-1704) fut le propagateur en France des idées de Leibniz. Son ouvrage *"Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes"*, fortement inspiré de l'enseignement de Jean Bernoulli (1667-1748), est considéré comme le premier manuel de calcul différentiel.

Démonstration : Soit $x \in I \setminus \{a\}$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe c strictement compris entre a et x tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Quand x tend vers a, c (qui dépend de x) est coincé entre a et x, et tend aussi vers a (théorème des gendarmes). Donc si f'/g' a une limite en a, f/g a la même limite. $\square$

Exercice. 1) Calculer $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{x - \pi}$. 2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{\ell n\,(1 + x) - \sin x}$ (en deux coups).
3) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin 1/x}{\sin x}$.

4.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

4.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 4.13. *Soit D un intervalle ouvert, ou une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit k un entier naturel. Une fonction réelle f définie sur D est dite* ***de classe $\mathscr{C}^k$ sur*** *D quand elle est k fois dérivable sur D, et que sa dérivée k-ème $f^{(k)}$ est continue sur D (on dit aussi que f* est k fois continûment dérivable sur *I).*

Il est bon de remarquer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur D est de classe $\mathscr{C}^\ell$ pour tout $\ell \leqslant k$.

Pour $k = 0$, une fonction de classe $\mathscr{C}^0$ sur D est simplement une fonction continue sur D.

Pour $k > 0$, une fonction f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D si et seulement si elle est dérivable sur D, et si sa dérivée f' est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur D. En utilisant ce critère, on démontre par récurrence sur k la proposition suivante.

Proposition 4.14. *Si f et g sont deux fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^k$ sur D et si λ est un nombre réel alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur D.*
Si en outre f ne s'annule pas sur D, alors $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D.

En particulier, les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur D forment un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions réelles définies sur D.
Démonstration : La proposition est connue pour $k=0$, quand on parle de fonctions continues. On suppose maintenant $k>0$, et la proposition vraie pour $k-1$. On se contentera de faire la démonstration du pas de récurrence pour $1/f$. On sait déjà que $1/f$ est dérivable, et sa dérivée vaut $-f'/f^2$. Les fonctions f' et f sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur D. Par l'hypothèse de récurrence, la fonction $-f'/f^2$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ sur D. Donc $1/f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D. □

Pour calculer la dérivée k-ème d'un produit, on dispose de la formule suivante.

Proposition 4.15 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $n\in\mathbb{N}$. Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur D allors fg est n fois dérivable sur D et on a :*

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{i} f^{(n-i)}g^{(i)} + \cdots + fg^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}g^{(n-i)}.$$

On remarquera l'analogie formelle de cette formule avec la formule du binôme.
Démonstration : . On procède par récurrence sur n. Pour $n=0$, la formule est claire. Soit alors $n\in\mathbb{N}$. Supposons la formule établie pour n et passons à $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' && \text{par définition}\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(i)}g^{(n-i)}\right)' && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(f^{(i)}g^{(n-i)}\right)' && \text{par linéarité de la dérivation}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(i+1)}g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(i)}g^{(n-i+1)} && \text{par dérivation d'un produit}\\
&= f^{(n+1)}g + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right) f^{(j)}g^{(n+1-j)} + fg^{(n+1)},
\end{aligned}$$

et on utilise pour conclure la relation de Pascal $\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}=\binom{n+1}{j}$. □

4.3.2 Composition, fonction réciproque

La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$.

Proposition 4.16. *Soit $k\in\mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur D, et soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur E, avec $f(D)$ contenu dans E. Alors la fonction composée $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D.*

Démonstration : On procède par récurrence sur k. Pour $k=0$, on sait que la composée de deux fonctions continues est une fonction continue. Supposons $k>0$, et la proposition établie pour $k-1$. Sous les hypothèses de la proposition, on sait déjà que $g\circ f$ est dérivable sur D et que $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$. Les fonctions f', g' et f sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et, par hypothèse de récurrence, la composée $g'\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Donc $(g\circ f)'$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D. □

Nous voyons maintenant à quelle condition la fonction réciproque d'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ est elle-même de classe $\mathscr{C}^k$.

Proposition 4.17. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (k un entier strictement positif) sur un intervalle ouvert I et strictement monotone sur cet intervalle. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle $f(I)$,*
2. *pour tout x dans I, $f'(x) \neq 0$.*

Démonstration : Supposons la propriété 1 vérifiée. Puisque $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de l'intervalle I, on a $(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$ pour tout x de I, et donc $f'(x) \neq 0$.

Supposons maintenant la propriété 2 vérifiée. On sait déjà que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et que sa dérivée vaut $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$. On raisonne alors par récurrence sur k. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$, la formule pour $(f^{-1})'$ montre qu'elle est continue, et donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$. Supposons maintenant $k > 1$, et que l'on sache déjà que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Alors la même formule montre que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, et donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$. □

Tout ce qu'on a dit jusqu'à présent s'étend au cas $k = \infty$. Une fonction f est dite ***de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert*** I quand elle y est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout k, c.-à-d. quand f y est dérivable à n'importe quel ordre.

4.3.3 Prolongement par continuité des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Théorème 4.18 (Théorème de la limite de la dérivée)**.** *Supposons f continue sur l'intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' a une limite finie ℓ en a alors f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a.*

Démonstration : La fonction f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. La formule des accroissements finis nous dit que pour $x \in I$, $x \neq a$, il existe c compris entre a et x tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$. Quand x tend vers a, c qui est coincé entre a et x tend aussi vers a, et donc par hypothèse $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ (composition de limites). La conclusion en découle. □

Généralisons ce résultat :
Soit I un intervalle ouvert, a un point de I. Supposons donnée une fonction f de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ (l'intervalle I privé du point a). A quelle condition peut on prolonger par continuité la fonction f en une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'intervalle I tout entier ?

Proposition 4.19. *Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et que, pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant k$ on ait $\displaystyle\lim_{x \to a} f^{(i)}(x) = \ell_i$. Soit $\overline{f}$ la fonction f prolongée par continuité en a par $\overline{f}(a) = \ell$. Alors la fonction $\overline{f}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I tout entier, et $\overline{f}^{(i)}(a) = \ell_i$.*

Autrement dit, si f est k fois continûment dérivable en dehors de a, et si f et ses dérivées jusqu'à l'ordre k ont des limites finies en a, alors f se prolonge par continuité en une fonction k fois continûment dérivable y compris en a, et les dérivées en a sont les limites des dérivées.

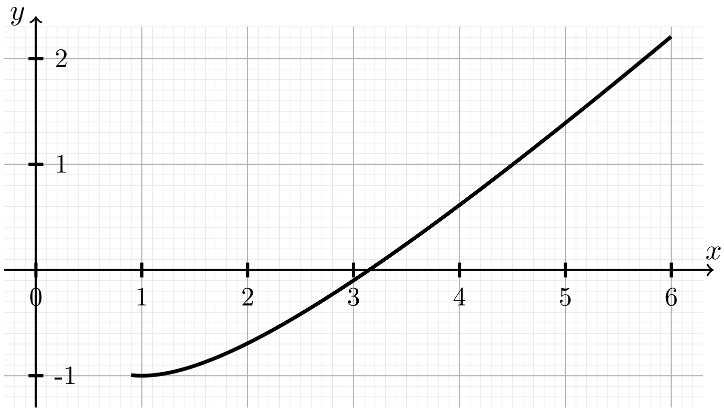
Démonstration : On raisonne encore une fois par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est le prolongement par continuité ordinaire. Supposons $k > 0$, et le résultat établi pour $k - 1$. On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction f' et on obtient que f' se prolonge par continuité en une fonction $k - 1$ fois continûment dérivable sur I tout entier. Il ne reste donc qu'à vérifier que le prolongement par continuité $\overline{f}$ est dérivable en a, et que $\overline{f}'(a) = \ell_1 = \lim_{x \to a} f'(x)$. La fonction $\overline{f}$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. La formule des accroissements finis nous dit que pour $x \in I$, $x \neq a$, il existe c compris entre a et x tel que $(\overline{f}(x) - \overline{f}(a))/(x-a) = f'(c)$. Quand x tend vers a, c qui est coincé entre a et x tend aussi vers a, et donc

$$\lim_{x \to a} \frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(a)}{x - a} = \ell_1,$$

ce qui montre ce que l'on voulait. $\square$

4.4 Application à l'étude de suites récurrentes

On traite ici un exemple de recherche approchée d'un zéro d'une fonction.
Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x - 2 - \ell n\, x$.
On commence par montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[3, 4]$ (théorème de la bijection et signes de $f(3)$ et $f(4)$). Dans toute la suite, on appelle ℓ cette solution et on cherche à approcher ℓ.

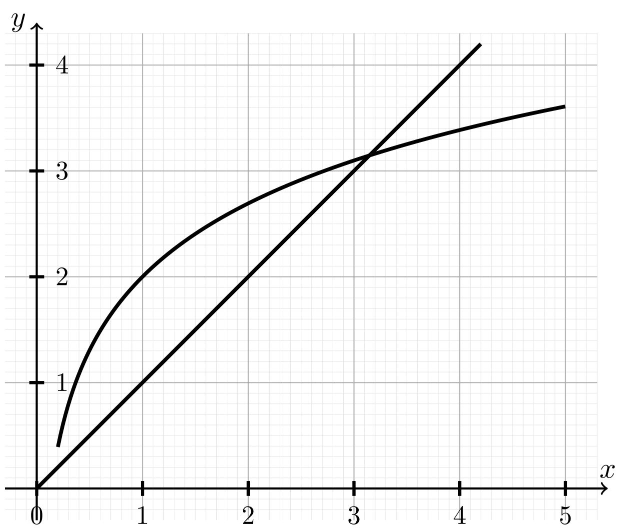


Méthode 1

On procède par dichotomie. À chaque étape de calcul $\ell \in [a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n = \dfrac{4-3}{2^n}$. Chaque étape divise donc en gros l'erreur par 2. Ce n'est pas très rapide ! (Il faut quatre étapes pour gagner une seule décimale.)

Méthode 2

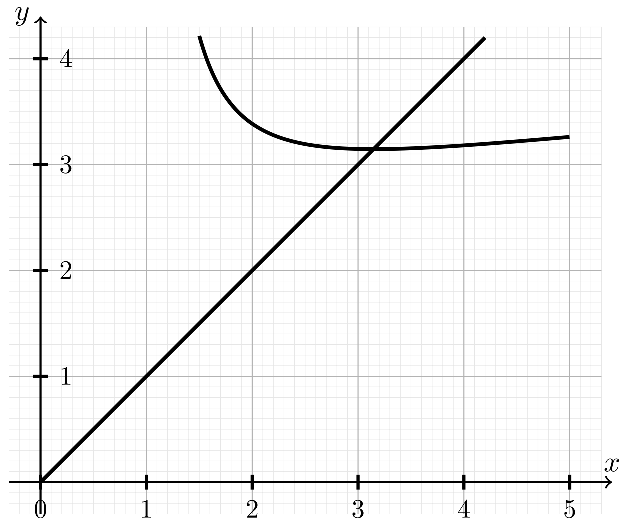
Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = 2 + \ell n\, x$.



On montre que la donnée de $u_0 = 3$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$ définissent bien une suite de nombres réels (car $g([3,4]) \subseteq [3,4]$) et que, pour tout entier n, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3^n}$ (en utilisant le théorème des accroissements finis). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers ℓ mais l'encadrement $\dfrac{1}{4}|u_n - \ell| \leqslant |u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3}|u_n - \ell|$ montre que chaque étape divise en gros l'erreur par 3. Ce n'est toujours pas rapide…

Accélération de la convergence : méthode de Newton

On considère la fonction Φ définie sur $[3,4]$ par $\Phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. On remarque que $\Phi(x)$ n'est autre que l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x et de l'axe des x.
On constate alors que $\Phi(\ell) = \ell$ et $\Phi'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$ donc $\Phi'(\ell) = 0$.



Dans la pratique ici, $\Phi(x) = \dfrac{x(1 + \ell n\, x)}{x - 1}$ et $\Phi'(x) = \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.
Les variations de Φ montrent alors que $\Phi([3,4]) \subseteq [3,4]$.

La donnée de $v_0 = 4$ et de la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \Phi(v_n)$ définissent alors une suite de nombres réels qui converge vers ℓ.

On calcule ensuite $\Phi''(x)$ et, à l'aide de majorations très simples, on montre que pour tout x de l'intervalle $[1,2]$, $|\Phi''(x)| \leqslant 2$. On utilise alors le résultat suivant :

Proposition 4.20. *Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et si f est deux fois dérivable sur $]a,b[$ alors :*

$$\exists c \in]a,b[\quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(c)$$

Démonstration : On introduit $g : x \longmapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \lambda\dfrac{(b-x)^2}{2!}$ où λ est une constante (que l'on ne cherche pas à exprimer) telle que $g(a) = 0$. g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $g(a) = g(b) = 0$: le théorème de Rolle assure l'existence d'un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$ ou encore $\lambda = f''(c)$. □

Conséquence. Soit $v > \ell$ un nombre réel. Cette formule pour la fonction Φ entre ℓ et v montre alors que pour tout entier n, $|v_{n+1} - \ell| \leqslant |v_n - \ell|^2$. Le carré change tout ! La convergence est à présent quadratique : chaque étape permet de doubler le nombre exact de décimales dans l'approximation de ℓ.