Chapitre 3

Limites et continuité

3.1 Limites de fonctions, continuité

3.1.1 Limite d'une fonction

Limite finie en un point

Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. On veut définir de manière précise ce que veut dire l'expression « la limite de f en a est égale à ℓ ». Pour que ceci ait un sens, on ne peut pas prendre a n'importe comment. Par exemple, si f est la fonction définie par $f(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$ pour $x < -1$ ou $x > 1$, cela a un sens de rechercher la limite en $a = 2$ ou en $a = 1$, mais visiblement pas pour $a = 0$.
Dans tout ce qui suit, nous ferons donc l'hypothèse suivante :

a est un nombre réel qui est une borne d'un intervalle ouvert non vide contenu dans D_f.

Définition 3.1. *On dit que le nombre réel ℓ est* **limite** *de f en a quand :*

> *pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout x de D_f vérifiant $|x-a| \leqslant \delta$, on a $|f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$.*

En formule, ceci s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \qquad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$$

Exercice. Montrer que l'on aurait pu exprimer le fait que ℓ est limite de f en a par la formule

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \qquad (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$$

Que veulent dire les formules suivantes ?

1) $\forall \varepsilon \geqslant 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f \quad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \geqslant 0\ \forall x \in D_f \quad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon)$
3) $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in D_f \quad (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon)$

Remarquons que l'hypothèse faite sur a permet d'affirmer que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in D_f$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. Ceci est crucial pour le résultat suivant :

Proposition 3.2. *Si une fonction admet une limite en un point alors celle-ci est unique. Autrement dit, si ℓ et m sont tous les deux limites de f en a, alors $\ell = m$.*

Démonstration : Supposons $\ell \neq m$, et posons $\varepsilon = \dfrac{|\ell - m|}{3}$. Comme $\varepsilon > 0$, en utilisant le fait que ℓ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a, on trouve $\delta_1 > 0$ tel que pour tout x de D_f vérifiant $|x - a| \leqslant \delta_1$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. De même on trouve $\delta_2 > 0$ tel que pour tout x de D_f vérifiant $|x-a| \leqslant \delta_2$, on a $|f(x)-m| \leqslant \varepsilon$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. D'après la remarque ci-dessus, il existe $x \in D_f$ tel que $|x-a| \leqslant \delta$. Pour un tel x on a $|\ell - f(x)| \leqslant \varepsilon$ et $|f(x)-m| \leqslant \varepsilon$, d'où l'on déduit, par l'inégalité triangulaire, $|\ell - m| \leqslant 2\varepsilon < |\ell - m|$. On est arrivé à une absurdité et on a donc $\ell = m$. □

La proposition précédente permet de parler de *la* limite ℓ de f en a (quand elle veut bien exister). On la note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$. On peut aussi écrire $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Proposition 3.3. *Si la fonction f possède une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a : $\exists M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap]a-\delta, a+\delta[\quad |f(x)| \leqslant M$.*

Démonstration : Appliquons la définition de la limite en choisissant, par exemple, $\varepsilon = 1$.

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \qquad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant 1)$$

Soit alors $x \in D_f \cap]a-\delta, a+\delta[$. Comme $|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell|$, l'inégalité triangulaire donne $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$. On obtient donc le résultat attendu en posant $M = 1 + |\ell|$. □

Exercice. Montrer que si a appartient au domaine de définition de f et f a une limite en a, alors cette limite est égale à $f(a)$.

L'exercice précédent montre que la fonction f définie par $f(x) = 1$ pour $x = 0$ et $f(x) = x$ pour $x \neq 0$ n'a pas de limite en 0, au sens de la définition donnée. Visiblement, elle a la limite 0 « quand x tend vers 0 en restant différent de 0 ». Par ailleurs, si on considère la fonction qui à tout réel x associe sa partie entière (le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x), on voit bien que cette fonction n'a pas de limite quand x tend vers 1, mais qu'elle en a une quand x tend vers 1 en restant strictement inférieur à 1, et une autre quand x tend vers 1 en restant strictement supérieur à 1 (une limite à gauche et une limite à droite en 1). Nous allons préciser ces notions.

Définition 3.4. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.*

*1) On suppose que D_f contient un intervalle dont a est une extrémité. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est **limite de $f(x)$ quand x tend vers a en étant différent de a** quand :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (0 < |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

*2) On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a, b[$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est **limite à droite** de f en a quand :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a < x \leqslant a + \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

*3) On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]b, a[$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est **limite à gauche** de f en a quand :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a - \delta \leqslant x < a \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

Les limites que l'on vient de définir sont uniques, si elles veulent bien exister. Les hypothèses faites dans chaque cas permettent de répéter le raisonnement de la proposition 3.2. On note $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$ pour la limite de $f(x)$ quand x tend vers a en restant différent de a, $\lim\limits_{x\to a,\, x>a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ pour la limite à droite de f en a, $\lim\limits_{x\to a,\, x<a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ pour la limite à gauche de f en a. Ici a^+ et a^- ne sont pas des nombres réels, ce sont simplement des éléments de notation.

Exercice. On suppose que le domaine de définition de f contient un intervalle ouvert contenant a.

1) Vérifier que f a une limite en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x) = f(a)$.

2) Vérifier que f a une limite en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Dans certains ouvrages, la définition de limite en a et la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ correspondent à ce que nous désignons ici par $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$. Il faut prendre garde à ceci et vérifier la définition de limite dans les ouvrages que l'on consulte : la différence de définition peut donner des résultats dont la formulation est différente. Il n'y a vraiment conflit que dans le cas où f est définie en a, où $\lim\limits_{x\to a,\, x\neq a} f(x)$ existe et est différent de $f(a)$.

Limite finie en l'infini

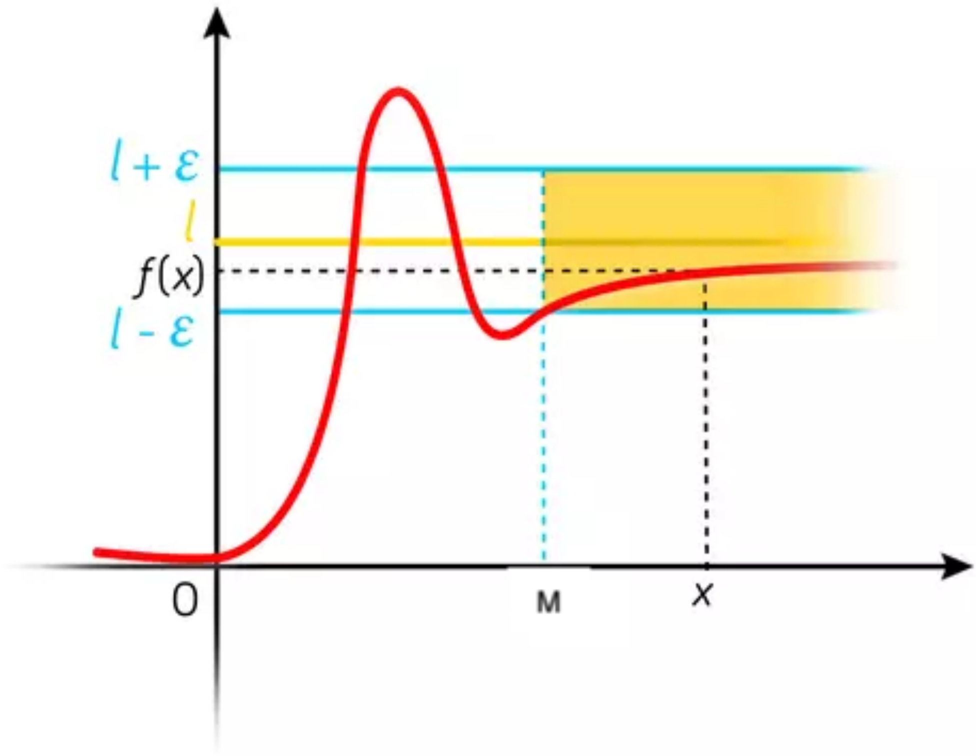
Définition 3.5. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$.*

*1) On suppose que D_f contient un intervalle $]b, +\infty[$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est **limite de f en** $+\infty$ quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel M tel que, pour tout x de D_f vérifiant $x \geqslant M$ on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad (x \geqslant M \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$

*2) On suppose que D_f contient un intervalle $]-\infty, b[$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est **limite de f en** $-\infty$ quand pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel M tel que, pour tout x de D_f vérifiant $x \leqslant M$ on a $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad (x \leqslant M \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)\ .$$



Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, si elles existent, sont uniques, et on les note respectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice. Montrer que l'on aurait pu exprimer le fait que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ par

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \quad (x > M \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) .$$

Limites infinie

Pour une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on veut rendre $f(x)$ « proche de ℓ », c'est-à-dire $|f(x) - \ell|$ plus petit que n'importe quel nombre positif ε donné. Les formules qui disent que ℓ est limite s'écrivent :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \ldots (\ldots \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) .$$

Pour une limite $+\infty$, on veut rendre $f(x)$ « proche de $+\infty$ », c'est-à-dire $f(x)$ plus grand que n'importe quel nombre M donné. Les formules qui disent que $+\infty$ est limite s'écrivent :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \ldots (\ldots \Longrightarrow f(x) \geqslant M) .$$

Les formules qui disent que $-\infty$ est limite s'écrivent :

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \ldots (\ldots \Longrightarrow f(x) \leqslant M) .$$

À titre d'exemple, précisons la notion de limite $+\infty$ dans un cas.

Définition 3.6. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle $]a, b[$. On dit que $+\infty$ est limite à droite de f en a quand pour tout réel M, il existe un réel $\delta > 0$, tel que, pour tout x de D_f vérifiant $a < x \leqslant a + \delta$, on a $f(x) \geqslant M$:*

$$\forall M \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (a < x \leqslant a + \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant M) .$$

Exercice. Écrivez une formule qui veut dire $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Proposition 3.7. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. On suppose que D_f contient un intervalle (non vide et non réduit à un point) dont a est une borne. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1) S'il existe une fonction u et un réel $h > 0$ tels que $\lim_{x \to a} u(x) = 0$ et $|f(x) - \ell| \leqslant u(x)$ pour tout $x \in D_f$ vérifiant $|x - a| < h$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

2) S'il existe une fonction u et un réel $h > 0$ tels que $\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$ et $f(x) \geqslant u(x)$ pour tout $x \in D_f$ vérifiant $|x - a| < h$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Démonstration : Montrons le point 1). Donnons nous $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x \to a} u(x) = 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x - a| \leqslant \delta_1$ on a $|u(x)| \leqslant \varepsilon$. Posons $\delta = \min(\delta_1, h)$. Alors pour tout $x \in D_f$ tel que $|x - a| \leqslant \delta$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant u(x) \leqslant \varepsilon$. Ceci montre que $\ell = \lim_{x \to a} f(x)$. □

Exercice. Montrer la partie 2) de la proposition précédente.

Remarque. D'un point de vue pratique, cette proposition est essentielle. Pour montrer qu'une fonction f admet ℓ pour limite en a, il est bien souvent plus facile de montrer que $f(x) - \ell$ tend vers 0 quand x tend vers a. En effet, pour qu'une fonction ait 0 pour limite en a il suffit qu'une fonction majorante (en valeur absolue) ait cette propriété.

Exemple. La fonction $x \longmapsto x + 3 - x \cos x$ a 3 pour limite en 0. En effet, $|f(x) - 3| \leqslant 2\,|x|$ et $\lim_{x \to 0} 2\,|x| = 0$.

3.1.2 Fonction continue

Définition 3.8. *Soit f une fonction à valeurs réelles dont le domaine de définition est la partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de D_f. On dit que* f ***est continue en*** a *quand* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

On remarque qu'il suffit de dire que cette limite existe, car si elle existe elle est obligatoirement égale à $f(a)$. En formule, la définition de la continuité en a s'écrit :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon) .$$

Le δ dépend a priori de ε.

Supposons que D_f contient un intervalle $]a-h, a+h[$. Alors, f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Définition 3.9. *On dit que* f ***est continue*** *quand f est continue en tout point de D_f.*

$$\forall a \in D_f \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon) .$$

Ici le δ dépend a priori de ε et aussi de a.

Définition 3.10. *On suppose que le domaine de définition D_f de f contient un intervalle (non vide et non réduit à un point) dont le réel b est une borne mais que b n'appartient pas à D_f. Si $\lim_{x\to b} f(x)$ existe et est égale au réel ℓ, alors le* ***prolongement par continuité de*** f ***en*** b *est la fonction g définie par $g(x) = f(x)$ si x appartient à D_f et $g(b) = \ell$.*

Ce prolongement par continuité est automatiquement continu en b. Souvent, on note par une même lettre la fonction f et son prolongement par continuité.

Exemple. Si f est définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

3.1.3 Lien avec les suites

Le théorème suivant exprime le lien entre limite de fonction et limite de suite.

Théorème 3.11 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que le domaine de définition D_f contient un intervalle (non vide et non réduit à un point) dont a est une borne. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$.
2. *Pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.*

Démonstration : Supposons que 1 soit vérifié. Soit (u_n) une suite d'éléments de D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$. Fixons nous $\varepsilon > 0$. D'après 1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x de D_f, si $|x-a| \leqslant \delta$, alors $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. L'objectif est de remplacer dans cette dernière inégalité x par u_n. Pour ce faire, il suffit que $|u_n - a| \leqslant \delta$. Or, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - a| \leqslant \delta$. En résumé, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, $|f(u_n) - \ell| \leqslant \varepsilon$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Réciproquement, supposons que 2 soit vérifié. Si 1 n'était pas vérifié, il existerait $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $\delta > 0$, on ait un x dans D_f avec $|x-a| \leqslant \delta$ et $|f(x)-\ell| > \varepsilon$. En prenant $\delta = \dfrac{1}{n+1}$, on aurait pour tout n un élément u_n de D_f tel que $|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$. On aurait ainsi une suite (u_n) d'éléments de D_f dont la limite est a, mais telle que la suite $f(u_n)$

n'a pas ℓ pour limite. Ceci est contraire à l'hypothèse 2, on a donc montré 1 par l'absurde. $\square$

Remarque. Le résultat précédent s'étend au cas où a est $+\infty$ ou $-\infty$. Il s'étend aussi au cas où ℓ est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice. On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a, a+h[$. Caractériser en termes de suites la propriété $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.

Remarque. On peut se servir de la proposition que l'on vient de démontrer pour transférer des résultats connus sur les limites de suites aux limites de fonctions. Par exemple, la limite d'une fonction, si elle existe, est unique. En effet on peut choisir une suite (u_n) d'éléments de D_f qui tend vers a (grâce à l'hypothèse faite sur a), et on sait que la limite de la suite $(f(u_n))$, si elle existe, est unique.

Corollaire 3.12. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a un point de D_f (qui est une borne d'un intervalle ouvert non vide inclus dans D_f).*
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *f est continue en a.*
2. *Pour toute suite (u_n) d'éléments de D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Exercice. Que vaut $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$?

Voici un résultat qui ressemble fortement au théorème qui dit qu'une suite croissante majorée de nombres réels a une limite.

Proposition 3.13. *Soit f une fonction à valeurs réelles, croissante et majorée sur l'intervalle $]a, b[$ (on peut avoir $b = +\infty$). Alors f a une limite finie en b^- (en $+\infty$ lorsque $b = +\infty$). Cette limite est la borne supérieure de f sur $]a, b[$.*

Démonstration : Puisque la fonction f est majorée sur $]a, b[$, elle a bien une borne supérieure M sur cet intervalle. Donnons nous $\varepsilon > 0$. $M - \varepsilon$ n'est alors pas un majorant de f sur $]a, b[$ et il existe donc c dans $]a, b[$ tel que $f(c) > M - \varepsilon$. Par croissance de f, pour tout x dans $[c, b[$, on a $M - \varepsilon < f(x) \leqslant M$ et donc $|f(x) - M| \leqslant \varepsilon$. La conclusion en résulte. $\square$

Exercice. 1) Formuler le résultat correspondant pour les fonctions décroissantes minorées sur un intervalle ouvert.

2) Est ce qu'une fonction croissante majorée sur un segment $[a, b]$ est obligatoirement continue en b ?

3.1.4 Inégalités

Une inégalité stricte vraie à la limite en a est vraie sur un intervalle ouvert contenant a. De manière précise :

Proposition 3.14. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$. Soit a un réel qui est une extrémité d'intervalle ouvert et non vide contenu dans D_f. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est strictement supérieure au réel M, alors il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que, pour tout x dans l'intersection de D_f avec cet intervalle, on a $f(x) > M$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) > M \quad \Longrightarrow \quad (\exists h > 0 \quad \forall x \in D_f \quad (|x-a| < h \Longrightarrow f(x) > M)) \ .$$

Démonstration : Soit $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$. En appliquant la définition avec $\varepsilon = \ell - M > 0$, on obtient un réel $h > 0$ tel que, pour tout x de D_f tel que $|x-a| \leqslant h$, on a $|f(x) - \ell| < \ell - M$. Donc, pour tout x dans l'intersection de D_f avec l'intervalle $]a-h, a+h[$, on a bien $f(x) > M$. □

Exercice.

1) On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]a, b[$. Que peut-on affirmer si $\lim_{x\to a+} f(x) > M$?

2) On suppose que D_f contient un intervalle de la forme $]b, +\infty[$. Que dire si $\lim_{x\to+\infty} f(x) > M$?

Corollaire 3.15. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a un point de D_f. On suppose que f est continue en a, et que $f(a) > M$. Alors il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que, pour tout x dans l'intersection de D_f avec cet intervalle, on a $f(x) > M$.*

Une inégalité large vraie quand x tend vers a est vraie à la limite en a. De manière précise :

Proposition 3.16. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur D_f. On suppose que D_f contient un intervalle (non vide et non réduit à un point) dont a est une borne et que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.*
1) S'il existe <u>une</u> suite (u_n) d'éléments de D_f tels que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et que $f(u_n) \geqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant M$.
2) S'il existe $h > 0$ tel que pour tout x de D_f vérifiant $|x-a| < h$, on a $f(x) \geqslant M$, alors $\ell \geqslant M$.

Démonstration : 1) Grâce au théorème 3.11, ce résultat est une conséquence directe du passage à la limite dans une inégalité large pour une suite.

2) Soit (u_n) une suite d'éléments de D_f qui tend vers a. À partir d'un certain rang on doit avoir $|u_n - a| < h$, et donc $f(u_n) \geqslant M$ d'après l'hypothèse de 2). On applique alors la propriété 1). □

Corollaire 3.17. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$. Soit a un point de D_f. On suppose que f est continue en a. S'il existe une suite (u_n) d'éléments de D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ et que pour tout n, $f(u_n) \geqslant M$, alors $f(a) \geqslant M$.*

Les résultats que nous venons de formuler sont bien sûr vrais aussi en remplaçant $>$ par $<$ et $\geqslant$ par $\leqslant$.

Remarque. Une inégalité stricte vraie quand x tend vers a n'est pas nécessairement vraie à la limite en a. Ainsi, par exemple, $\forall x > 0,\ 1 + \frac{1}{x} > 1$ mais $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.

3.1.5 Opérations

Proposition 3.18. *On suppose que a est l'extrémité d'un intervalle (ouvert et non vide) contenu dans l'intersection des domaines de définition des fonctions f et g. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Soit λ est un nombre réel. Alors :*

1. *$f+g$ a une limite en a et on a : $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m$.*
2. *λf a une limite en a et on a : $\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda\ell$.*
3. *$f \times g$ a une limite en a et on a : $\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = \ell \times m$.*

Démonstration : Grâce au théorème 3.11, ce résultat est une conséquence directe du théorème analogue sur les limites de sommes et de produits de suites. □

Corollaire 3.19. *Si f et g sont deux fonctions définies et continues sur D alors les fonctions $f+g$, λf et $f \times g$ sont continues sur D.*

Exemple. Comme la fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, ce corollaire permet de voir que toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.20. *Soit a un nombre réel qui est l'extrémité d'un intervalle (ouvert et non vide) contenu dans le domaine de définition D_f de la fonction f. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$. Alors il existe un réel $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\cap D_f$ soit contenu dans le domaine de définition de la fonction $\frac{1}{f}$, et*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} .$$

Démonstration : Supposons pour fixer les idées $\ell > 0$. Alors la proposition 3.14 montre qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout x dans $]a-h, a+h[\cap D_f$ on a $f(x) > 0$. Pour ces x on a en particulier $f(x) \neq 0$ et donc $\frac{1}{f(x)}$ est défini. Pour montrer que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} ,$$

on peut bien sûr utiliser le résultat correspondant pour les suites, grâce au théorème 3.11. Écrivons néanmoins une démonstration directe.

Donnons nous $\varepsilon > 0$. On veut rendre

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|\ell|\,|f(x)|}$$

plus petit que ε. On commence par minorer $|f(x)|$. Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et que $\frac{|\ell|}{2} > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$ vérifiant $|x-a| \leqslant \delta_1$, on a $|f(x)-\ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}$. Pour de tels x, $|\ell| = |\ell - f(x) + f(x)| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x)| \leqslant \frac{|\ell|}{2} + |f(x)|$ et donc $\frac{|\ell|}{2} \leqslant |f(x)|$. Ensuite, toujours en utilisant $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, on trouve $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D_f$ vérifiant $|x-a| \leqslant \delta_2$, on a $|f(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta > 0$ et, pour tout $x \in D_f$ vérifiant $|x-a| \leqslant \delta$ on a

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{\varepsilon|\ell|^2/2}{|\ell|\,|\ell|/2} = \varepsilon ,$$

ce qui est ce que l'on cherchait. On pourra comparer la démonstration que l'on vient de faire avec celle de la proposition analogue sur les suites. □

On déduit des résultats précédents que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$, alors $\frac{f}{g}$ a une limite finie en a et on a : $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{m}{\ell}$.

Corollaire 3.21. *Soient f et g deux fonctions définies et continues sur D. On suppose que g ne s'annule pas sur D. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur D.*

Exemple. Toute fraction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Les résultats obtenus pour les limites quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ restent valables quand on remplace a par $+\infty$ ou $-\infty$. Ils restent aussi valables pour des limites à gauche ou à droite.

Quand on a des limites infinies, on peut conclure sur la limite de la somme, du produit, du quotient si l'on n'est pas dans les cas « indéterminés » (voir les propositions correspondantes sur les suites).

Exercice. Écrire la démonstration de la propriété suivante : si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell > 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$. On pourra s'inspirer de la démonstration de la proposition analogue pour les suites.

Proposition 3.22. *On considère deux intervalles I et J. Soit f une fonction réelle de domaine de définition I et telle que $f(I) \subset J$, et soit g une fonction réelle définie sur J. Soit a un réel qui est extrémité d'un intervalle ouvert et non vide contenu dans I. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$, alors*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = m\ .$$

Démonstration : On remarque d'abord que ℓ est extrémité d'un intervalle ouvert et non vide contenu dans J. Ceci vient du fait que $f(x) \in J$ pour tout $x \in I$ et du passage à la limite dans les inégalités larges. Soit (u_n) une suite d'éléments de I dont la limite est a. D'après le théorème 3.11, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$. Comme la suite $(f(u_n))$ est une suite d'éléments de J qui a ℓ pour limite, on a, encore d'après le théorème 3.11 (caractérisation séquentielle de la limite), $\lim_{n\to+\infty} g(f(u_n)) = m$. Ceci montre que n'importe quelle suite d'éléments de I dont la limite est a a pour image par $g \circ f$ une suite dont la limite est m. Toujours d'après le théorème 3.11, ceci entraîne que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = m$. □

Exercice. Étudier la limite en 0 de $f : x \longmapsto \frac{e^{1/x}}{1+e^{3/x}}$.
On étudie séparément ce qui se passe pour $x > 0$ et pour $x < 0$. On trouve :

$$\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = \lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$$

f est finalement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Corollaire 3.23. *Avec les hypothèses de la proposition précédente, si f et g sont continues alors la fonction composée $g \circ f$ est continue sur I.*

Remarque. La démonstration de la proposition 3.22 s'applique aussi si on remplace a ou ℓ ou m par $+\infty$ ou $-\infty$.

3.2 Continuité sur un intervalle

3.2.1 Bornes et valeurs intermédiaires

Théorème 3.24. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur le segment $[a, b]$. Alors la fonction f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes sur $[a, b]$: il existe c et d dans $[a, b]$ tels que $f(c)$ et $f(d)$ soient respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des $f(x)$, pour x dans $[a, b]$.*

Démonstration : On va montrer que f est majorée sur $[a, b]$, et atteint sa borne supérieure. L'autre moitié se ferait de la même façon.
Dire que f est majorée sur $[a, b]$ revient à dire : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant M$.

Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée sur $[a, b]$. Alors, pour tout entier naturel n, on peut trouver un élément x_n dans $[a, b]$ tel que $f(x_n) > n$ (car n n'est pas un majorant de f). On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de $[a, b]$. Cette suite est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $\left(u_n = x_{\varphi(n)}\right)$.

En notant $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$, on a $\ell \in [a,b]$ (passage à la limite dans les inégalités pour les suites). Par continuité on doit avoir $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, mais $f(u_n)$ tend vers $+\infty$ puisque $f(u_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geqslant n$. (On rappelle que φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et que l'on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.) On aboutit ainsi à une contradiction et f est donc bien majorée.

Puisque f est majorée sur $[a,b]$, l'ensemble des $f(x)$ pour x dans $[a,b]$ admet une borne supérieure M. Pour tout entier naturel n, $M - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de f sur $[a,b]$ (car M est le plus petit de ces majorants), et donc on peut trouver y_n dans $[a,b]$ tel que $f(y_n) > M - \frac{1}{n+1}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de la suite (y_n) (qui est là encore bornée) une suite $\left(w_n = y_{\psi(n)}\right)$ qui converge vers une limite c, et c est dans $[a,b]$. On a $f(w_n) = f(y_{\psi(n)}) > M - \frac{1}{\psi(n)+1} \geqslant M - \frac{1}{n+1}$, et comme $f(w_n) \leqslant M$ il vient $|f(w_n) - M| < 1/2^n$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} f(w_n) = M$. Par continuité de f, il vient alors $f(c) = M$. $\square$

Théorème 3.25 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soient $a < b$ deux éléments de l'intervalle I. Soit ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe c dans le segment $[a,b]$ tel que $f(c) = \ell$.*

On peut paraphraser le théorème ainsi : si la fonction réelle continue f prend les valeurs m et M sur l'intervalle I, alors elle prend aussi toute valeur intermédiaire entre m et M.

Démonstration : On va faire le raisonnement dans le cas $f(a) \geqslant \ell \geqslant f(b)$. On fabrique par dichotomie une suite d'intervalles emboités $[a_n, b_n]$, avec la propriété que $f(a_n) \geqslant \ell \geqslant f(b_n)$.

- On initialise avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Supposons a_n et b_n déjà définis avec $f(a_n) \geqslant \ell \geqslant f(b_n)$. Si $f((a_n + b_n)/2) \geqslant l$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$.

On vérifie alors que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante. Comme de plus $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ on a $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ et les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Soit c leur limite commune. C'est un élément de $[a,b]$. La continuité de f permet de passer à la limite dans les inégalités larges (corollaire 3.17), ce qui donne $f(c) \geqslant \ell \geqslant f(c)$ et donc $f(c) = \ell$. $\square$

Conséquence. Si f est définie et continue sur $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[a,b]$. Le procédé de dichotomie de la démonstration peut servir à la recherche d'une telle solution. Ceci peut servir pour des polynômes par exemple : la dichotomie fournit une première approximation d'une racine, et on peut ensuite utiliser une autre méthode (par exemple celle de Newton) à partir de cette approximation.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer que :

Proposition 3.26. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a une racine réelle.*

Démonstration : On peut, en divisant par le coefficient dominant, se ramener au cas d'un polynôme unitaire

$$A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{2n} X^{2n} + X^{2n+1} .$$

Puisque $\lim_{x\to-\infty} A(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A(a) < 0$ (resp. $b \in \mathbb{R}$ tel que $A(b) > 0$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c entre a et b tel que $A(c) = 0$. $\square$

L'exercice suivant permet de donner explicitement, en fonction des coefficients de A, un M tel qu'on est sûr de trouver une racine de A sur $[-M, M]$. On peut alors démarrer une dichotomie comme dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires pour encadrer une racine de A.

Exercice. On pose $M = 1 + |a_0| + \cdots + |a_{2n}|$. Montrer que si $|\alpha| = M$ ($\alpha = M$ ou $\alpha = -M$), on a

$$\left| \frac{a_0}{\alpha^{2n+1}} + \frac{a_1}{\alpha^{2n}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{\alpha} \right| < 1 \,.$$

On en déduit que

$$A(\alpha) = \alpha^{2n+1} \left(\frac{a_0}{\alpha^{2n+1}} + \cdots + \frac{a_{2n}}{\alpha} + 1 \right)$$

est du signe de α. Montrer que A a une racine entre $-M$ et M.

Voici une autre application du théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 3.27. *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Alors il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.*

Démonstration : On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = x - f(x)$. Elle est continue (comme différence de fonctions continues), et on a $g(a) \leqslant 0$ (car $f(a) \geqslant a$) et $0 \leqslant g(b)$ (car $g(b) \leqslant b$). Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans $[a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$. □

Le théorème 3.24 sur les bornes et le théorème 3.25 des valeurs intermédiaires peuvent être résumés par un seul énoncé.

Théorème 3.28. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Précisément, si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur le segment $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.*

Démonstration : Le théorème 3.24 nous dit que l'on a une borne inférieure et une borne supérieure

$$m = \inf\{f(x) \ ; \ x \in [a, b]\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{f(x) \ ; \ x \in [a, b]\},$$

et on a bien sûr $f([a, b])$ contenu dans $[m, M]$. Il dit aussi que ces bornes sont atteintes sur $[a, b]$. Par le théorème 3.25, toute valeur intermédiaire entre m et M est aussi atteinte sur $[a, b]$. Donc l'image $f([a, b])$ est égale à $[m, M]$. □

Que peut-on dire de l'image par une fonction continue d'un intervalle I qui n'est pas un segment ?

Proposition 3.29. *Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration : On prend pour M la borne supérieure de $f(I)$ si elle existe, $+\infty$ sinon. On prend pour m la borne inférieure de $f(I)$ si elle existe, $-\infty$ sinon. Si ℓ vérifie $m < \ell < M$, alors il n'est ni minorant ni majorant de $f(I)$ et donc il existe a et b dans I tels que $f(a) < \ell < f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ℓ est dans $f(I)$. Ainsi $f(I)$ contient $]m, M[$. Il contient en plus m ou M si ce sont des valeurs prises par f sur I. □

Par contre, on ne peut en général rien dire de la forme de $f(I)$

Exercice. Comparer les images par la fonction sinus des trois intervalles ouverts $]0, \pi[$, $]-\pi/2, \pi/2[$, $]0, 2\pi[$.

3.2.2 Fonctions monotones

On rappelle qu'une fonction réelle est *monotone* sur un intervalle I quand elle est croissante sur I, ou décroissante sur I.

Proposition 3.30. *Soit f une fonction réelle définie et monotone sur un intervalle I. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.*

Démonstration : On fait le raisonnement dans le cas où f est croissante sur I. Soit J l'intervalle $f(I)$. On peut écarter le cas où J est réduit à un point, car alors f est constante et donc trivialement continue sur I. Soit a dans I. On veut montrer que f est continue en a. Donnons nous $\varepsilon > 0$, et cherchons à approcher $f(a)$ à moins de ε.

— Si $f(a)$ est à l'intérieur de l'intervalle J (ce n'est pas une des bornes), on peut trouver ℓ et m dans J avec
$$f(a) - \varepsilon < \ell < f(a) < m < f(a) + \varepsilon\ .$$
Il existe b et c dans I tels que $f(b) = \ell$ et $f(c) = m$, et puisque f est croissante on a nécessairement $b < a < c$. Posons $\delta = \min(a - b, c - a)$. Si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$, alors $b < x < c$ et donc $\ell \leqslant f(x) \leqslant m$, d'où $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$.

— Si $f(a)$ est une borne de J, par exemple sa borne supérieure, alors on peut trouver ℓ et b comme ci-dessus. On pose $\delta = a - b$. Si $x \in I$ et $|x - a| < \delta$, alors $b < x$ et donc $\ell \leqslant f(x) \leqslant f(a)$, d'où $|f(a) - f(x)| < \varepsilon$.

On a bien montré dans les deux cas que f est continue en a. □

Exercice. Montrez qu'on ne peut pas enlever l'hypothèse que f est monotone pour la proposition précédente : donnez un exemple de fonction f définie sur $[-1, 1]$, telle que $f([-1, 1]) = [-1, 1]$, mais qui n'est pas continue sur $[-1, 1]$.

On peut même faire plus fort (c'est plus difficile). Considérons la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$, mais pas continue en 0. Si I est un intervalle contenu dans $[-1, 1]$ et contenant 0, quelle est son image $g(I)$? En déduire que l'image par g de tout intervalle contenu dans $[-1, 1]$ est un intervalle.

Théorème 3.31. *Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone, sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation.*

Démonstration : On fait le raisonnement dans le cas où f est strictement croissante. Si y appartient à $f(I)$, il existe x dans I tel que $f(x) = y$, et ce x est unique car $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$. Donc f est bien une bijection de I sur $f(I)$, avec la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ qui est définie par $f^{-1}(y) = x$ si et seulement si $f(x) = y$. Cette fonction f^{-1} est strictement croissante : si $y < y'$, alors $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ car sinon on aurait $y = f(f^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y')) = y'$. L'image de l'intervalle $f(I)$ par la fonction f^{-1} est l'intervalle I. Donc, d'après la proposition précédente, f^{-1} est continue. □

Le graphe de la fonction f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la diagonale. Vous avez déjà vu plusieurs fois des cas d'application de ce théorème.

f	f^{-1}
$x \longmapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$	$x \longmapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$
(pour $\alpha \neq 0$) $x \longmapsto x^\alpha$ sur $]0, +\infty[$	$x \longmapsto x^{1/\alpha}$ sur $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \sin x$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$	$x \longmapsto \arcsin x$ sur $[-1, 1]$
...	...