Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1.1 Définition

Lemme 1.1. *Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
• *S'il existe une injection de* $\{1, \cdots, n\}$ *dans* $\{1, \cdots, p\}$ *alors* $n \leqslant p$.
• *S'il existe une bijection de* $\{1, \cdots, n\}$ *dans* $\{1, \cdots, p\}$ *alors* $n = p$.

Démonstration : Montrons la contraposée du premier point. Procédons par récurrence sur p en posant, pour tout entier naturel non nul p, $\mathscr{P}_p$ l'assertion : « Pour tout entier $n > p$, il n'existe pas d'injection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$. »

- *(initialisation)* Soit un entier $n > 1$. Si f est une application de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1\}$ alors on a $f(n) = 1 = f(1)$ et donc f n'est pas injective. En particulier $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_p$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie.
  Soit un entier $n > p+1$. Supposons par l'absurde l'existence d'une injection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p+1\}$.
  - $\star$ ou bien $f(n) = p+1$ et alors $\forall k \neq n$, $f(k) \neq p+1$ donc

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : \{1, \cdots, n-1\} & \longrightarrow & \{1, \cdots, p\} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

    est une application et est une injection. C'est, par hypothèse de récurrence, absurde puisqu'on a $n-1 > p$.
  - $\star$ ou bien $f(n) \neq p+1$. Soit alors φ la bijection de $\{1, \cdots, p+1\}$ dans lui-même échangeant $f(n)$ et $p+1$ (et fixant tous les autres éléments). $\varphi \circ f$ est alors une injection (comme composée de deux telles applications) de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p+1\}$ vérifiant $\varphi \circ f(n) = p+1$. On retombe alors dans l'absurdité du cas précédent.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc établi le résultat.

Pour le second point, s'il existe une bijection f de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$ alors $n \leqslant p$ car f est injective et $p \leqslant n$ car f^{-1} est bijective. On a bien $n = p$. □

Proposition et Définition 1.2. *Un ensemble non vide E est dit* ***fini*** *s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de E dans* $\{1, \cdots, n\}$.
Si un tel entier n existe, il est alors unique et est appelé ***cardinal*** *de E. On note alors* $\mathrm{Card}(E) = n$ *ou encore* $|E| = n$.
Par convention, l'ensemble vide est fini et est de cardinal 0.

Remarque. Il revient au même de dire qu'il existe une bijection de E dans $\{1, \cdots, n\}$ que de dire qu'il existe une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans E.

Démonstration : Pour montrer l'unicité d'un tel n, supposons l'existence d'une bijection f de E dans $\{1, \cdots, n\}$ et d'une bijection g de E dans $\{1, \cdots, p\}$. $h = g \circ f^{-1}$ est alors une bijection de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, p\}$. Le lemme permet alors de conclure. □

Remarque. La notion de cardinal coïncide avec la notion intuitive de nombre d'éléments d'un ensemble. Plus précisément, si $E \neq \emptyset$ est de cardinal n, on peut considérer une bijection f de E dans $\{1, \cdots, n\}$. En notant g la bijection réciproque de f et en posant $e_i = g(i)$ pour tout i de dans $\{1, \cdots, n\}$, on a alors : $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$. On a donc numéroté les éléments de E.

Exercice. Montrer que deux ensembles finis sont en bijection si et seulement s'ils ont même cardinal.

1.1.2 Partie d'un ensemble fini

Lemme 1.3. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$ et a un élément de E. Alors $E \backslash \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.*

Démonstration : Si $n = 1$, alors $E = \{a\}$, donc $E \backslash \{a\} = \emptyset$ qui est fini, et $\mathrm{Card}(E \backslash \{a\}) = 0 = 1 - 1$. Supposons donc $n \geqslant 2$. Soit alors $h : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow E$ une bijection.

Si $h(n) = a$, alors $\tilde{h} : \{1, \cdots, n-1\} \longrightarrow E \backslash \{a\}$ est encore bijective, donc $E \backslash \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

Si $h(n) \neq a$, alors par bijectivité de h, il existe un unique k tel que $h(k) = a$. On considère la bijection φ de $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même échangeant k et n (et fixant tous les autres éléments). $h \circ \varphi : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow E$ est alors bijective (comme composée) et $h \circ \varphi(n) = a$. On s'est ramené au cas précédent, et $E \backslash \{a\}$ est fini de cardinal $n - 1$.

□

Proposition 1.4 (Cardinal d'une partie d'un ensemble fini)**.** *Tout sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini et on a $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$. Ces cardinaux sont de plus égaux si et seulement si $A = E$.*

Démonstration : La démonstration du premier point est laissée à titre d'exercice. On pourra procéder par récurrence sur le cardinal de E en s'appuyant sur le lemme et en remarquant que, pour $a \in A$, $A \backslash \{a\} \subset E \backslash \{a\}$. On concluera alors en montrant que si $A \backslash \{a\}$ est fini alors il en est de même de A...

Pour le cas d'égalité, on suppose $A \subset E$ et $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ (le sens indirect est immédiat). Si par l'absurde $A \neq E$ alors on peut considérer un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Mais alors $A \subset E \backslash \{a\}$ et le premier point donne $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E) - 1$ ce qui est absurde. □

Remarque. Pour montrer l'égalité de deux ensembles finis, il suffit donc de montrer une inclusion et l'égalité des cardinaux.

Corollaire 1.5 (Cardinal d'une intersection)**.** *Si A et B sont deux parties finies d'un même ensemble E alors $A \cap B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cap B) \leqslant \min(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B))$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. □

1.1.3 Cardinal d'une réunion

Théorème 1.6 (Réunion disjointe)**.** *Si A et B sont deux parties finies et* ***disjointes*** *d'un même ensemble E alors $A \cup B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.

Démonstration : Le résultat est clair si A ou B est vide. Dans le cas contraire, notons $n = \mathrm{Card}(A)$ et $p = \mathrm{Card}(B)$ et considérons deux bijections $f : \{1, \cdots, n\} \to A$ et $g : \{1, \cdots, p\} \to B$. Posons alors

$$\begin{aligned} h : \{1, \cdots, n+p\} &\longrightarrow A \cup B \\ k &\longmapsto \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leqslant n \\ g(k-n) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Montrons que h est surjective. Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, f étant surjective, on peut écrire $x = f(k)$ pour un certain $k \in \{1, \cdots, n\}$ et on a $x = h(k)$. Sinon, $x \in B$ et, g étant surjective, on peut écrire $x = g(j)$ pour un certain $j \in \{1, \cdots, p\}$ et on a $x = h(n+j)$.
- Montrons que h est injective. Supposons donc $h(k) = h(k')$. Comme $f(k) = g(k'-n)$ et $g(k-n) = f(k')$ sont impossibles (car $A \cap B = \emptyset$), on a $f(k) = f(k')$ (et donc $k = k'$ car f est injective) ou $g(k-n) = g(k'-n)$ (et donc $k - n = k' - n$ car g est injective). On a donc bien toujours $k = k'$.

h est finalement bijective et le résultat annoncé en découle. □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont n parties finies deux à deux disjointes d'un même ensemble E alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i)$.

Corollaire 1.7 (Cardinal du complémentaire)**.** *Si A est une partie de l'ensemble fini E alors $\overline{A}$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que $E = A \cup \overline{A}$ et que $A \cap \overline{A} = \emptyset$. □

Théorème 1.8 (Cardinal d'une réunion)**.** *Si A et B sont deux parties finies d'un même ensemble E alors $A \cup B$ est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Démonstration : On a $A \cup B = (A \cup B) \cap E = (A \cup B) \cap (B \cup \overline{B})$ donc par distributivité $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup B \cup (B \cap \overline{B}) = B \cup (A \cap \overline{B})$. Cette dernière réunion étant disjointe, $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B})$. D'autre part, $A = A \cap E = A \cap (B \cup \overline{B})$ donc $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et cette réunion étant disjointe, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B})$. En regroupant ces deux égalités, on obtient le résultat annoncé. □

Exercice. Montrer que si A, B et C sont trois parties finies d'un même ensemble E alors

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

1.1.4 Cardinal d'un produit cartésien

Théorème 1.9 (Cardinal d'un produit cartésien)**.** *Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est un ensemble fini et on a* $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

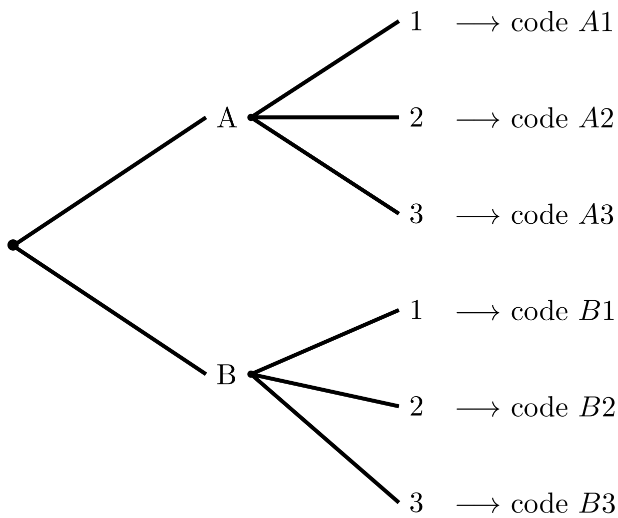
Démonstration : Le résultat est clair si A ou B est vide.
Dans le cas contraire, notons n le cardinal de A. La première remarque de ce chapitre permet d'écrire $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et on a donc $E \times F = \bigcup_{i=1}^{n} \{e_i\} \times F$. Les $\{e_i\} \times F$ étant deux à deux

disjoints, on a alors $\mathrm{Card}(E\times F) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(\{e_i\}\times F)$. Or, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ fixé, l'application $x \mapsto (e_i, x)$ est une bijection de F dans $\{e_i\} \times F$ donc $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(\{e_i\} \times F)$. Finalement, $\mathrm{Card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(F) = n\mathrm{Card}(F)$. □

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles finis alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\,(E_1 \times \cdots \times E_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(E_i)$.

Exemple. Un code est composé d'une lettre (A ou B) suivie d'un chiffre (1, 2 ou 3). Combien y a-t-il de tels codes ?

Solution : Un code est une liste composée d'un élément de $L = \{A, B\}$ suivi d'un élément de $C = \{1, 2, 3\}$; c'est donc un élément de $L \times C$. Le nombre de codes est donc le cardinal de $L \times C$. Comme $\mathrm{Card}(L \times C) = \mathrm{Card}(L) \times \mathrm{Card}(C)$, il y a finalement $2 \times 3 = 6$ codes possibles. On peut d'ailleurs utiliser un arbre pour énumérer tous les codes possibles :



1.1.5 Applications entre ensembles finis

Proposition 1.10. *Si E et F sont deux ensembles finis alors l'ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ des applications de E dans F est fini et son cardinal est* $\mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}$.

Démonstration : Notons n le cardinal de E et p celui de F. La remarque initiale permet de numéroter les éléments de E : $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$. On construit alors une application φ de $\mathscr{F}(E, F)$ dans F^n en posant, pour $f \in \mathscr{F}(E, F)$, $\varphi(f) = (f(e_1), \cdots, f(e_n))$. On vérifie facilement que φ est bijective et on en déduit que $\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F^n) = p^n$. □

Corollaire 1.11. *Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.*

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal n et

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E, \{0, 1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbf{1}_A \text{ où } \mathbf{1}_A \text{ est définie par } \mathbf{1}_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } \mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

- f est surjective : si φ est une application de E dans $\{0, 1\}$ alors, en posant $A = \{x \in E,\ \varphi(x) = 1\}$, on a $\varphi = \mathbf{1}_A$.

- f est injective : si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $x \in A \Leftrightarrow \mathbf{1}_A(x) = 1 = \mathbf{1}_B(x)$ donc $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ et $A = B$.

φ étant une bijection, le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ est celui de $\mathscr{F}(E, \{0,1\})$ soit 2^n d'après la proposition précédente. □

Proposition 1.12. *Si f est une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F alors $f(E)$ est fini et* $\mathrm{Card}(f(E)) \leqslant \mathrm{Card}(E)$ *avec égalité si et seulement si f est injective.*

Remarque. On retiendra qu'une application n'augmente jamais le nombre d'éléments...

Démonstration : Notons n le cardinal de E et introduisons une bijection φ de $\{1, \cdots, n\}$ dans E. L'application $g : f(E) \longrightarrow \{1, \cdots, n\}$, $y \longmapsto \min\{i \in \{1, \cdots, n\},\ f \circ \varphi(i) = y\}$ est alors injective (le vérifier !). $\tilde{g} : f(E) \longrightarrow g[f(E)]$, $x \longmapsto g(x)$ est alors bijective et comme $g[f(E)] \subset \{1, \cdots, n\}$, $g[f(E)]$ est fini de cardinal inférieur à n. Par bijection, il en est donc de même de $f(E)$. Traitons à présent le cas d'égalité. Si f est injective, $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$, $x \longmapsto f(x)$ est bijective donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$. Réciproquement, en notant $n = \mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E)$, on peut écrire $E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ (numérotation) et donc $f(E) = \{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$. Ce dernier ensemble étant de cardinal n, on a : $\forall i \neq j$, $f(e_i) \neq f(e_j)$ et f est bien injective. □

Théorème 1.13. *Si E et F sont des ensembles finis* ***de même cardinal*** *et si f est une application de E dans F alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective *(ii) f est surjective* *(ii) f est bijective*

Démonstration : Si f est injective la proposition 1.12 donne $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$. Comme $f(E) \subset F$, on a alors $f(E) = F$ (proposition 1.4) et f est donc surjective. On a montré (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, si f est surjective $f(E) = F$ donc $\mathrm{Card}(f(E)) = \mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$. La proposition 1.12 assure alors que f est injective : (ii) $\Rightarrow$ (i). □

Remarque. Le résultat n'est plus valable hors du cadre fini ! Par exemple, l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ est injective mais n'est pas surjective...

1.2 Dénombrement des listes et des combinaisons

1.2.1 p-listes d'un ensemble E à n éléments

Définition 1.14. *On se donne deux entiers naturels non nuls n et p et un ensemble E à n éléments. On appelle* ***p-liste*** *d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E. C'est donc un élément $(x_1, \cdots, x_p)$ de E^p (avec $\forall i \in \{1, ..., p\}$ $x_i \in E$).*

Remarque. Dans une p-liste d'eléments de E les éléments ne sont pas nécessairement distincts (ils peuvent se répéter), mais leur ordre dans la p-liste est important. On utilise donc les ***p*-listes** lorsque l'**ordre** est important et les **répétitions** possibles.

Exemples.

- Soit $E = \{0, 1, \cdots, 9\}$. $(3,3,3)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(3,1,2)$ sont quatre 3-listes distinctes d'éléments de E.
- Soit $E = \{a, b, c\}$. (a, b, b, c, a) est une 5-liste d'éléments de E.

Proposition 1.15. *Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est n^p.*

Démonstration : C'est en effet le cardinal de E^p. □

1.2.2 p-listes d'éléments distincts de E

Définition 1.16. *On se donne deux entiers naturels non nuls n et p et un ensemble E à n éléments. On appelle* ***p-arrangement*** *de E toute p-liste $(x_1, ..., x_p)$ d'éléments* <u>*distincts*</u> *de E : $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.*
On note A_n^p le nombre de p-arrangements de E. On convient que $A_n^0 = 1$.

Remarque. Dans un p-arrangement d'éléments de E, les éléments sont tous distincts, et leur ordre dans la p-liste est important. On utilise donc les **p-arrangements** lorsque l'**ordre** est important et qu'il n'y a **pas de répétition** possible.

Exemple. Si $E = \{a, b, c, ..., y, z\}$ et $p = 5$, alors (a, e, g, p, b) et (a, g, p, b, e) sont deux 5-arrangements de E.

Proposition 1.17. *Si* $\mathrm{Card}(E) = n$*, le nombre de p-arrangements de E est le nombre, noté A_n^p, donné par :*

$$A_n^p = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : Notons $\mathscr{A}_p$ l'ensemble des p-arrangements de E. Le résultat est clair si $p = 0$ (convention) mais aussi si $p > n$ (on a alors $\mathscr{A}_p = \emptyset$). Pour le reste, procédons par récurrence sur p en posant, pour tout entier naturel non nul p, $\mathscr{P}_p$ l'assertion :
« $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_p) = n(n-1)\cdots(n-p+1)$. »

- *(initialisation)* $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_1) = Card(E) = n$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, $p < n$. Supposons $\mathscr{P}_p$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie. Pour $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathscr{A}_p$, notons $\mathscr{B}_x = \{(x_1, ..., x_p, x_{p+1}),\ x_{p+1} \in E \backslash \{x_1, ..., x_p\}\}$. On a alors $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_x) = \mathrm{Card}(E \backslash \{x_1, ..., x_p\}) = n - p$. Il est d'autre part clair que $\mathscr{A}_{p+1} = \bigcup_{x \in \mathscr{A}_p} \mathscr{B}_x$ (le vérifier !). Les $\mathscr{B}_x$ étant deux à deux disjoints, on a :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{A}_{p+1}) = \sum_{x \in \mathscr{A}_p} \mathrm{Card}(\mathscr{B}_x) = \mathrm{Card}(\mathscr{A}_p).(n-p).$$

  Par hypothèse de récurrence on a donc $A_n^{p+1} = n \cdots (n-p+1)(n-p)$ et $\mathscr{P}_{p+1}$ est donc vraie.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence, $\mathscr{P}_p$ est vraie pour tout p de $[\![1, n]\!]$.

$\square$

Corollaire 1.18. *A_n^p est aussi le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n ; en particulier, le nombre de bijections d'un ensemble fini E (de cardinal n) dans lui même (on parle de* ***permutations****) est $n!$.*

Démonstration : Pour le premier point, on peut, sans perte de généralité, supposer que $E = \{1, \cdots, p\}$ et $F = \{1, \cdots, n\}$. On construit alors une application φ de l'ensemble des injections de E dans F vers l'ensemble $\mathscr{A}_p(F)$ des p-arrangements d'éléments de F en associant à toute injection f de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ le p-arrangement $(f(1), \cdots, f(p))$. Cette application est une une bijection (le vérifier !) et le premier point en résulte.
Le second point en découle puisque les injections de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ sont les bijections de $\{1, \cdots, n\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ (théorème 1.13) et que $A_n^n = n!$. $\square$

1.2.3 Combinaisons

Définition 1.19. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-**combinaison** d'éléments d'un ensemble E toute partie de E contenant p éléments.*

Remarque. Dans une combinaison, les éléments sont tous distincts et leur ordre est sans importance. On utilise donc les combinaisons lorsque l'ordre est sans importance et les répétitions impossibles.

Proposition 1.20. *Si card $E = n$, le nombre de combinaisons à p éléments de E se note $\binom{n}{p}$ ou encore C_n^p et l'on a :*

$$\forall\, 0 \leqslant p \leqslant n \qquad \binom{n}{p} = \frac{1}{p!} A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Démonstration : Pour $B \subset E$, notons $\mathscr{A}_p(B)$ l'ensemble de tous les p-arrangements d'éléments de B. Il est alors clair que l'on a la décomposition en réunion d'ensembles disjoints

$$\mathscr{A}_p(E) = \bigcup_{B\subset E,\, \mathrm{Card}(B)=p} \mathscr{A}_p(B).$$

Autrement dit on a partitionné $\mathscr{A}_p(E)$ en regroupant dans une même classe $\mathscr{A}_p(B)$ tous les arrangements formés à partir des éléments d'une même partie B de cardinal p. Il y a donc autant de classes distinctes dans cette décomposition que de parties B de cardinal p dans E, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$ classes. D'autre part chaque classe $\mathscr{A}_p(B)$ contient autant d'arrangements que de bijections de B dans B, c'est-à-dire $p!$. La réunion étant disjointe, on déduit alors : $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_p(E)) = \sum_{B\subset E,\, \mathrm{Card}(B)=p} \mathrm{Card}(\mathscr{A}_p(B)) = \binom{n}{p} p!$. soit $A_n^p = \binom{n}{p} p!$. □

1.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Remarque. Les résultats qui suivent peuvent tous être démontrés par le calcul en utilisant la dernière proposition. Le choix fait ici consiste en une approche combinatoire.

Proposition 1.21. *Si n et p sont deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.*

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal n. Introduisons

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \{A \subset E, |A| = p\} & \longrightarrow & \{A \subset E, |A| = n-p\} \\ A & \longmapsto & \overline{A} \end{array}$$

Pour toute partie A de E de cardinal p, $\overline{A}$ est une partie de E et $\mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A) = n - p$ donc φ est une application. On vérifie qu'elle est bijective.
Les ensembles de départ et d'arrivée de φ ont alors le même cardinal, ce qui donne le résultat annoncé. □

Proposition 1.22. *Si n et p sont deux entiers tels que $0 < p \leqslant n$ alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration : Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Fixons un élément a de E. Soit $0 \leqslant p \leqslant n$ un entier. Notons $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E à p éléments. Il est alors clair que l'on a la décomposition en réunion d'ensembles disjoints

$$\mathscr{C}_p(E) = \{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\} \cup \{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}.$$

Or $\{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\}$ est en bijection avec $\{B \subset E\backslash\{a\},\, \mathrm{Card}(B) = p-1\}$ (par l'application $A \longmapsto A\backslash\{a\}$ donc $\mathrm{Card}\left(\{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \in A\}\right) = \binom{n-1}{p-1}$. De même, $\{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}$ est en bijection avec $\{B \subset E\backslash\{a\},\, \mathrm{Card}(B) = p\}$ (par l'application $A \longmapsto A$ donc $\mathrm{Card}\left(\{A \subset E,\, \mathrm{Card}(A) = p \text{ et } a \notin A\}\right) = \binom{n-1}{p}$.
On conclut alors en appliquant le théorème 1.6. □

Proposition 1.23 (Formule du binôme de Newton)**.** *Pour tous nombres (réels ou complexes) a et b et pour tout entier natuel n on a :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration : On peut bien sûr procéder par récurrence mais on peut aussi avoir une approche combinatoire : élever $(a+b)$ à la puissance n revient à multiplier n binômes identiques $(a+b)$. Le résultat est une somme où chaque élément est le produit de n facteurs de type a ou b choisi chacun dans un binôme différent. Les termes sont ainsi de la forme $a^k b^{n-k}$. Chacun de ces termes est obtenu autant de fois qu'il existe de façons de choisir les k éléments a parmi les n, c'est à dire le nombre de combinaisons $\binom{n}{k}$. □

Exercice. Retrouver à l'aide de cette formule le résultat de la proposition 1.10.