Une introduction aux probabilités quantiques

et leur application aux chaîne de Markov quantiques

Dimitri Petritis

Institut de recherche mathématique
Université de Rennes 1 and CNRS (UMR 6625)

Novembre 2007

Théorie des probabilités et physique classique

- **Formulation de Kolmogorov**
  - Espace de probabilité: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  - Espace mesurable: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
  - Variable aléatoire réelle: $X : \Omega \to \mathbb{R}$, measurable
  - Loi de X:

$$\mathbb{P}_X(B) \equiv \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X \in B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

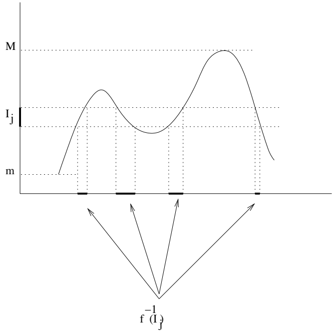
- **Quelle signification?**
  - Kolmogorov: Ensemble de propositions expérimentalement vérifiables = σ-algebra booléenne
  - Théorème de Loomis-Sikorski: toute σ-algebra booléenne est image σ-homomorpe d'une tribu $\mathcal{F}$ des parties d'un Ω non-vide.

Dictionnaire probabilités-physique classique

Dictionnaire

	Probabilités	Physique
Ω	Univers	Espace des phases
$\omega \in \Omega$	réalisation	microétat
X	variable aléatoire	observable
$\mathbb{P}$	probabilité	(macro) état
$\mathbb{P}_X$	loi de X	fonction d'état de X dans état $\mathbb{P}$
$(\omega_t)_t$	trajectoire	flot dynamique
$X(\omega_t)$	processus stochastique	évolution temporelle de X

Approximation par des fonctions simples



Une approche différente

- Continue, bornée $X : \Omega \to \mathbb{R}$;
  $m = \inf X(\omega)$; $M = \sup X(\omega)$; $\mathrm{spec}(X) = [m, M]$.
- Objets importants: $\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Convention: $\mathbb{1}_F \equiv F$.)
- Mesure à valeurs indicatrices $\Pi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \to \mathbb{1}_{X^{-1}(B)} (\in \mathcal{F})$.

$$\forall \omega : |X(\omega) - \sum_j x_j \Pi(I_j)(\omega)| < \epsilon.$$

$$\lim \sum_j x_j \Pi(I_j) = \int x \Pi(dx) = X.$$

Décomposition spectrale

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega (\int_m^M x\Pi(dx)(\omega))\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\operatorname{spec} X} x\mathbb{P}_X(dx).\end{aligned}$$

- $\Pi^2 = \Pi$; $\Pi(B \cap C) = \Pi(B)\Pi(C)$; $\operatorname{supp}\Pi = \operatorname{spec} X = \operatorname{im} X$.
- Π est la mesure spectrale de X. Contient la même information que X.
- En mécanique quantique de nouveau: $X = \int x\Pi(dx)$ mais Π projection à un sous-espace hilbertien.

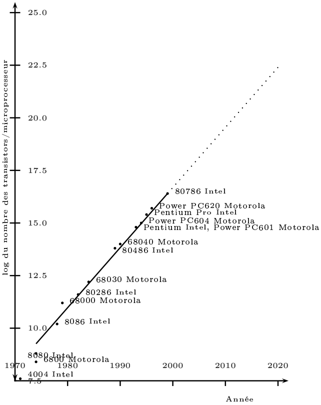
Échelles des grandeurs physiques

Échelles:
- Masse: 10^{-31}kg – 10^{51}kg
- Longueur: 10^{-15}m – 10^{27}m
- Temps: 10^{-23}s – 10^{17}s

Constante de Planck: $\hbar = 1.05457 \times 10^{-34} \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$
Vitesse de la lumière: $c = 2.99792458 \times 10^{8} \mathrm{m/s}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{Théorie quantique des champs}} \arrow[dl, "\hbar \to 0"'] \arrow[dr, "c \to \infty"] & \\
\boxed{\text{Relativité restreinte}} \arrow[dr, "c \to \infty"'] & & \boxed{\text{Mécanique quantique}} \arrow[dl, "\hbar \to 0"] \\
 & \boxed{\text{Mécanique classique}} &
\end{tikzcd}$$

Évolution de la technologie informatique



Postulats de la mécanique quantique

. . . et leur interprétation

- **Postulat 1:** Espace des phases = espace hilbertien complexe séparable $\mathbb{H}$; rayons $\psi \in \mathbb{H} : \|\psi\| = 1$ correspondend à des états (purs).
- Exemple $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$:
$\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Composants de ψ correspondend à des amplitudes de probabilité.
- **Postulat 2:** Évolution temporelle d'un système quantique isolé dérive d'un opérateur unitaire sur $\mathbb{H}$.
- ϕ rayon; $\psi = U\phi$ est encore un rayon i.e. un état pur.
- $\phi = U^*\psi$: l'évolution temporelle est réversible.

Postulats de la mécanique quantique

... et leur interprétation

- **Postulat 1:** Espace des phases = espace hilbertien complexe séparable $\mathbb{H}$; rayons $\psi \in \mathbb{H} : \|\psi\| = 1$ correspondend à des états (purs).
- Exemple $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$:
  $\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Composants de ψ correspondend à des amplitudes de probabilité.
- **Postulat 2:** Évolution temporelle d'un système quantique isolé dérive d'un opérateur unitaire sur $\mathbb{H}$.
- ϕ rayon; $\psi = U\phi$ est encore un rayon i.e. un état pur.
- $\phi = U^*\psi$: l'évolution temporelle est réversible.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Postulats de la mécanique quantique

... et leur interprétation

- **Postulat 1:** Espace des phases = espace hilbertien complexe séparable $\mathbb{H}$; rayons $\psi \in \mathbb{H} : \|\psi\| = 1$ correspondend à des états (purs).
- Exemple $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$:
  $\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Composants de ψ correspondend à des amplitudes de probabilité.
- **Postulat 2:** Évolution temporelle d'un système quantique isolé dérive d'un opérateur unitaire sur $\mathbb{H}$.
- ϕ rayon; $\psi = U\phi$ est encore un rayon i.e. un état pur.
- $\phi = U^*\psi$: l'évolution temporelle est réversible.

Postulats de la mécanique quantique

. . . et leur interprétation

- **Postulat 1:** Espace des phases = espace hilbertien complexe séparable $\mathbb{H}$; rayons $\psi \in \mathbb{H} : \|\psi\| = 1$ correspondend à des états (purs).
- Exemple $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$:
  $\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Composants de ψ correspondend à des amplitudes de probabilité.
- **Postulat 2:** Évolution temporelle d'un système quantique isolé dérive d'un opérateur unitaire sur $\mathbb{H}$.
- ϕ rayon; $\psi = U\phi$ est encore un rayon i.e. un état pur.
- $\phi = U^*\psi$: l'évolution temporelle est réversible.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Postulats de la mécanique quantique

... et leur interprétation

- **Postulat 1:** Espace des phases = espace hilbertien complexe séparable $\mathbb{H}$; rayons $\psi \in \mathbb{H} : \|\psi\| = 1$ correspondend à des états (purs).
- Exemple $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$:
  $\|\psi\|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Composants de ψ correspondend à des amplitudes de probabilité.
- **Postulat 2:** Évolution temporelle d'un système quantique isolé dérive d'un opérateur unitaire sur $\mathbb{H}$.
- ϕ rayon; $\psi = U\phi$ est encore un rayon i.e. un état pur.
- $\phi = U^*\psi$: l'évolution temporelle est réversible.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Postulat de la mécanique quantique
. . . et leur interprétation (suite)

Postulat 3: Observables physiques associés à des opérateurs auto-adjoints bornés sur $\mathbb{H}$. Mesure (physique)de X dans état ψ signifie de déterminer mesure (borélienne) dur $\mathbb{R}$ induite par mesure spectrale de X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}.$$

Val. propres x	vec. propres $u(x)$	Projecteurs $\Pi(\{x\})$
-3	$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$
2	$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X &= \sum_{x\in\{-3,2\}} x\Pi(\{x\}) \\ &= (-3)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Postulats de la mécanique quantique
... et leur interprétation (suite)

$$\begin{aligned}\psi &= \alpha_{-3}u(-3)+\alpha_2 u(2).\\ \langle\,\psi\,|\,X\psi\,\rangle &= \sum_{x,x',x''}\alpha_x^*\alpha_{x''}x'\langle\,u(x)\,|\,\Pi(\{x'\})u(x'')\,\rangle\\ &= \sum_{x\in\mathrm{spec}(X)} x|\alpha_x|^2,\end{aligned}$$

où $|\alpha_x|^2=\langle\,\psi\,|\,\Pi(\{x\})\psi\,\rangle$. $\mathbb{E}_\psi X=\langle\,\psi\,|\,X\psi\,\rangle$.
Observables élémentaires: Π questions “oui-non”.
Nouvel état après mesure $\Pi(\{x\})$: $u(x)$.

Résumé de la mécanique quantique

- La mécanique quantique peut être vue comme une extension non-commutative des probabilités.
-

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\
&= \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} x_k \sqrt{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} e^{-i\theta_k} x_k \sqrt{p_k} e^{i\theta_k}.
\end{aligned}
$$

- i.e. classiquement, $\mathbb{E}X = \langle \psi | \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \psi \rangle$, où $\psi \in \mathbb{C}^n$ with $\|\psi\| = 1$.

Résumé de la mécanique quantique

- La mécanique quantique peut être vue comme une extension non-commutative des probabilités.
- $$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\
&= \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}\, x_k \sqrt{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} e^{-i\theta_k} x_k \sqrt{p_k} e^{i\theta_k}.
\end{aligned}$$
- i.e. classiquement, $\mathbb{E}X = \langle \psi | \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \psi \rangle$, où $\psi \in \mathbb{C}^n$ with $\|\psi\| = 1$.

Résumé de la mécanique quantique

- La mécanique quantique peut être vue comme une extension non-commutative des probabilités.
-

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\
&= \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} x_k \sqrt{p_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} e^{-i\theta_k} x_k \sqrt{p_k} e^{i\theta_k}.
\end{aligned}$$

- i.e. classiquement, $\mathbb{E}X = \langle \psi \mid \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \psi \rangle$, où $\psi \in \mathbb{C}^n$ with $\|\psi\| = 1$.

Résumé de la mécanique quantique (suite)

En quantique,

- variables aléatoires réelles = opérateurs auto-adjoints bornés généraux sur espace de Hilbert approprié.
- Plus précisément, espace de probabilité quantique: $(\mathfrak{A}, \sigma)$, où $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre et σ un état provenant d'un opérateur auto-adjoint positif $\sigma(a) = \mathrm{tr}(\rho a)$.

Résumé de la mécanique quantique (suite)

En quantique,

- variables aléatoires réelles = opérateurs auto-adjoints bornés généraux sur espace de Hilbert approprié.
- Plus précisément, espace de probabilité quantique: $(\mathfrak{A}, \sigma)$, où $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre et σ un état provenant d'un opérateur auto-adjoint positif $\sigma(a) = \mathrm{tr}(\rho a)$.

Résumé de la mécanique quantique (suite)

En quantique,

- variables aléatoires réelles = opérateurs auto-adjoints bornés généraux sur espace de Hilbert approprié.
- Plus précisément, espace de probabilité quantique: $(\mathfrak{A}, \sigma)$, où $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre et σ un état provenant d'un opérateur auto-adjoint positif $\sigma(a) = \mathrm{tr}(\rho a)$.

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Calcul propositionnel

- Chercher description unifée pour systèmes classiques et quantiques.
- Il suffit d'examiner seulement les mesures spectrales Π.
- Trouver carctéristiques communes entre ensembles mesurables de $\mathcal{F}$ et sous-espaces fermés de $\mathbb{H}$.
- Intérêt théorique: unification du formalisme
- Intérêt pratique: l'extraction de l'information comme opération géométrique à partir de logiques conditionnelles, floues, quantiques.
- $\Rightarrow$ treillis de propositions

Treillis des propositions

Définition: Λ est un treillis si $\mathbf{0} \in \Lambda$ et $\mathbf{1} \in \Lambda$ et

1. idempotence: $a \wedge a = a = a \vee a$,
2. commutativité: $a \wedge b = b \wedge a$ and $a \vee b = v \vee a$,
3. associativité: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ et $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
4. identité: $a \wedge \mathbf{1} = a$ and $a \vee \mathbf{0} = a$,
5. absorption: $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$.

- $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$: Treillis = ensemble partiellement ordonné (poset).
- a' orhtocomplément de a si $a \wedge a' = \mathbf{0}$ et $a \vee a' = \mathbf{1}$.

Treillis de propositions

- Distributivité: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (et duale).
- Modularité: $a \leq c$: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$
- Orthomodularité: $a \leq c$: $a \vee (a' \wedge c) = c$

Définition: Orthocomplémentation $\perp: \Lambda \ni a \mapsto a^\perp \in \Lambda$, vérifiant pour $a, b \in \Lambda$:

1. $\perp$ injective,
2. $a \leq b \Rightarrow b^\perp \leq a^\perp$,
3. $(a^\perp)^\perp = a$,
4. $a \wedge a^\perp = \mathbf{0}$.

Logique

Définition: Une logique Λ est un treillis orthocomplémenté t.q.

1. pour toute suite dénombrable $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Λ, $\vee_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\wedge_{n\in\mathbb{N}}$ existent dans Λ,
2. si $a_1, a_2 \in \Lambda$ et $a_1 \leq a_2$, alors il existe $b \in \Lambda$, tel que $b \leq a_1^\perp$ et $b \vee a_1 = a_2$.

Spg orthomodularité avec $a' = a^\perp$.
Si distributivité vraie alors logique $= \sigma$-algèbre (tribu).

Reformulation (système)

Postulat 1': Dans tout système physique (classique ou quantique), l'ensemble des propositions expérimentalement vérifiables forme une logique (classique ou quantique standard).

Reformulation (observables)

Définition: Soit Λ une logique. Une observable réelle est une application

$$x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \Lambda, \ \text{t.q.}$$

1. $x(\emptyset) = \mathbf{0}; x(\mathbb{R}) = \mathbf{1}$,
2. $B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow x(B_1) \perp x(B_2)$.
3. Si $(B_n)_n$ mutuellement disjoints alors $x(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \vee_{n\in\mathbb{N}} x(B_n)$.

Ensemble des observables sur Λ: $\mathcal{O}(\Lambda)$.

$$\text{spec}(x) = \cap_{C \text{ fermé}: x(C) = \mathbf{1}} C.$$

Postulat 2': Ensemble des observables d'un système physique (classique ou quantique), décrit par logique Λ est donné par $\mathcal{O}(\Lambda)$.

Reformulation (états)

Définition: Un état sur la logique Λ est une application $p : \Lambda \to [0, 1]$ t.q.

1. $p(\mathbf{0}) = 0; p(\mathbf{1}) = 1$,
2. si $(a_n)_n$ propositions mutuellement orthogonales et $a = \vee_n a_n$ alors $p(a) = \sum_n p(a_n)$.

Ensemble des états noté $\mathcal{S}(\Lambda)$. Une fonction d'état est une application

$$\sigma : \mathcal{O}(\Lambda) \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Reformulation (états)

Théorème: $\mathcal{S}(\Lambda)$ est convexe (mais non nécessairement un simplexe de Choquet.)

Théorème: Soit $p \in \mathcal{S}(\Lambda)$.

1. Si $\sigma_p : \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ défini par
$$\sigma_p(x)(B) = p(x(B)), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
alors σ_p est une fonction d'état.
2. Si σ fonction d'état, alors $\exists! p \in \mathcal{S}(\Lambda)$, t.q. $\forall x \in \mathcal{O}(\Lambda)$ et $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\sigma(x)(B) = p(x(B)).$$

Reformulation (états)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p(x) &= \int_{\mathrm{spec}(x)} t\sigma_p(x)(dt)\\ &= \int_{\mathrm{spec}(x)} tp(x(dt)).\end{aligned}$$

Postulat 3': Ensemble des états de tout système physique est $\mathcal{S}(\Lambda)$.
Postulat 4': Measurer physiquement une observable x signifie de déterminer sa fonction d'état $p(x(\cdot))$.

Reformulation (automorphismes et symmétries)

Lemme: Soit $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ l'ensemble d'automorphismes de Λ et $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Application induite $\tilde{\alpha}$ sur $\mathcal{S}(\Lambda)$ par

$$\tilde{\alpha}(p)(a) = p(\alpha^{-1}(a)), a \in \Lambda, p \in \mathcal{S}(\Lambda),$$

est un automorphisme convexe de $\mathcal{S}(\Lambda)$.

Définition: G groupe topologique localement compact. L'application $\pi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(\Lambda))$ est une représentation si

1. $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$ pour tout $g_1, g_2 \in G$,
2. $\forall a \in \Lambda$, $\forall p \in \mathcal{S}(\Lambda)$, l'application $g \mapsto \pi(g)(p)(a)$ est $\mathcal{B}(G)$-mesurable.

Reformulation (automorphismes et symmétries)

Postulat 5': Évolution temporel de système isolé engendrée par représentation du groupe abelien $(\mathbb{R}, +)$ sur l'ensemble des automorphismes convexes de $\mathcal{S}(\Lambda)$.
Toute symétrie physique correspondant à G localement compact, induit une représentation sur les automorphismes convexes de $\mathcal{S}(\Lambda)$.

Logique quantique standard

- Logique: $\Lambda = \{\text{sous-espaces fermés du séparable } \mathbb{H}\}$. Identifier $\Lambda \ni M$ avec projection Π_M.
- Observables: mesures spectrales, i.e. projections x. Identifier opérateurs auto-adjoints X avec x via $X = \int tx(dt)$.
- États purs: correspondend aux rayons $\psi \in \mathbb{H}$ en définissant

$$\Lambda \ni M \mapsto p_\psi(M) \equiv \langle \psi \mid \Pi_M \psi \rangle = \|\Pi_M \psi\|^2.$$

- **Définition:** Un opérateur ρ sur $\mathbb{H}$ est une matrice densité s'il est borné, auto-adjoint, positif, de classe trace avec $\operatorname{tr} \rho = 1$.
- Ensemble des matrices densité noté $\mathcal{D}(\mathbb{H})$.

Logique quantique standard

- Logique: $\Lambda = \{$sous-espaces fermés du séparable $\mathbb{H}\}$. Identifier $\Lambda \ni M$ avec projection Π_M.
- Observables: mesures spectrales, i.e. projections x. Identifier opérateurs auto-adjoints X avec x via $X = \int tx(dt)$.
- États purs: correspondend aux rayons $\psi \in \mathbb{H}$ en définissant

$$\Lambda \ni M \mapsto p_\psi(M) \equiv \langle \psi \mid \Pi_M \psi \rangle = \|\Pi_M \psi\|^2.$$

- **Définition:** Un opérateur ρ sur $\mathbb{H}$ est une matrice densité s'il est borné, auto-adjoint, positif, de classe trace avec $\operatorname{tr} \rho = 1$.
- Ensemble des matrices densité noté $\mathcal{D}(\mathbb{H})$.

Logique quantique standard

- Logique: $\Lambda = \{\text{sous-espaces fermés du séparable } \mathbb{H}\}$. Identifier $\Lambda \ni M$ avec projection Π_M.
- Observables: mesures spectrales, i.e. projections x. Identifier opérateurs auto-adjoints X avec x via $X = \int tx(dt)$.
- États purs: correspondend aux rayons $\psi \in \mathbb{H}$ en définissant

$$\Lambda \ni M \mapsto p_\psi(M) \equiv \langle \psi \mid \Pi_M \psi \rangle = \|\Pi_M \psi\|^2.$$

- **Définition:** Un opérateur ρ sur $\mathbb{H}$ est une matrice densité s'il est borné, auto-adjoint, positif, de classe trace avec $\operatorname{tr} \rho = 1$.
- Ensemble des matrices densité noté $\mathcal{D}(\mathbb{H})$.

Logique quantique standard

- Logique: $\Lambda = \{\text{sous-espaces fermés du séparable } \mathbb{H}\}$. Identifier $\Lambda \ni M$ avec projection Π_M.
- Observables: mesures spectrales, i.e. projections x. Identifier opérateurs auto-adjoints X avec x via $X = \int tx(dt)$.
- États purs: correspondend aux rayons $\psi \in \mathbb{H}$ en définissant

$$\Lambda \ni M \mapsto p_\psi(M) \equiv \langle \psi \mid \Pi_M \psi \rangle = \|\Pi_M \psi\|^2.$$

- **Définition:** Un opérateur ρ sur $\mathbb{H}$ est une matrice densité s'il est borné, auto-adjoint, positif, de classe trace avec $\operatorname{tr} \rho = 1$.
- Ensemble des matrices densité noté $\mathcal{D}(\mathbb{H})$.

Logique quantique standard

- Logique: $\Lambda = \{$sous-espaces fermés du séparable $\mathbb{H}\}$. Identifier $\Lambda \ni M$ avec projection Π_M.
- Observables: mesures spectrales, i.e. projections x. Identifier opérateurs auto-adjoints X avec x via $X = \int tx(dt)$.
- États purs: correspondend aux rayons $\psi \in \mathbb{H}$ en définissant

$$\Lambda \ni M \mapsto p_\psi(M) \equiv \langle \psi \,|\, \Pi_M \psi \rangle = \|\Pi_M \psi\|^2.$$

- **Définition:** Un opérateur ρ sur $\mathbb{H}$ est une matrice densité s'il est borné, auto-adjoint, positif, de classe trace avec $\operatorname{tr} \rho = 1$.
- Ensemble des matrices densité noté $\mathcal{D}(\mathbb{H})$.

Logique quantique standard

- **Exemple 1:** Soit $\psi \in \mathbb{H}$. Alors Π_ψ projecteur sur $\mathbb{C}\psi$ est une matrice densité.
- **Exemple 2:** Soit $(\psi_n)_n$ suite arbitraire de rayons dans $\mathbb{H}$. Alors $\rho = \sum_n c_n \Pi_{\psi_n}$ avec $\sum_n c_n = 1, c_n \geq 0$ est une matrice densité.
- **Définition:** Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{H})$. Alors p, défini par

$$\Lambda \ni M \mapsto p(M) = \mathrm{tr}(\rho \Pi_M),$$

est un état, appelé état tracial. Nous avons $\mathbb{E}_p(X) = \mathrm{tr}(\rho X)$.

Logique quantique standard

- **Exemple 1:** Soit $\psi \in \mathbb{H}$. Alors Π_ψ projecteur sur $\mathbb{C}\psi$ est une matrice densité.
- **Exemple 2:** Soit $(\psi_n)_n$ suite arbitraire de rayons dans $\mathbb{H}$. Alors $\rho = \sum_n c_n \Pi_{\psi_n}$ avec $\sum_n c_n = 1, c_n \geq 0$ est une matrice densité.
- **Définition:** Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{H})$. Alors p, défini par
$$\Lambda \ni M \mapsto p(M) = \mathrm{tr}(\rho \Pi_M),$$
est un état, appelé état tracial. Nous avons $\mathbb{E}_p(X) = \mathrm{tr}(\rho X)$.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Logique quantique standard

- **Exemple 1:** Soit $\psi \in \mathbb{H}$. Alors Π_ψ projecteur sur $\mathbb{C}\psi$ est une matrice densité.
- **Exemple 2:** Soit $(\psi_n)_n$ suite arbitraire de rayons dans $\mathbb{H}$. Alors $\rho = \sum_n c_n \Pi_{\psi_n}$ avec $\sum_n c_n = 1, c_n \geq 0$ est une matrice densité.
- **Définition:** Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{H})$. Alors p, défini par

$$\Lambda \ni M \mapsto p(M) = \mathrm{tr}(\rho \Pi_M),$$

est un état, appelé état tracial. Nous avons $\mathbb{E}_p(X) = \mathrm{tr}(\rho X)$.

Logique quantique standard

- Symétries: $\langle U\phi \mid U\psi \rangle = \langle \phi \mid \psi \rangle, \forall \phi, \psi \Rightarrow UU^* = U^* U = \mathbb{1}$
- Automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$: $\alpha(M) = UM$
- Induit automorphisme convexe $\tilde{\alpha}$ sur états traciaux par:

$$\tilde{\alpha}(p)(M) = p(\alpha^{-1}(M)) = \mathrm{tr}(\rho U^* \Pi_M U) = \mathrm{tr}(U\rho U^* \Pi_M).$$

- Se traduit par la transformation réversible

$$\rho \mapsto U\rho U^*$$

sur matrices densité.

Logique quantique standard

- Symétries: $\langle U\phi \mid U\psi \rangle = \langle \phi \mid \psi \rangle, \forall \phi, \psi \Rightarrow UU^* = U^*U = \mathbb{1}$
- Automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$: $\alpha(M) = UM$
- Induit automorphisme convexe $\tilde{\alpha}$ sur états traciaux par:

$$\tilde{\alpha}(p)(M) = p(\alpha^{-1}(M)) = \mathrm{tr}(\rho U^* \Pi_M U) = \mathrm{tr}(U \rho U^* \Pi_M).$$

- Se traduit par la transformation réversible

$$\rho \mapsto U\rho U^*$$

sur matrices densité.

Logique quantique standard

- Symétries: $\langle U\phi \mid U\psi \rangle = \langle \phi \mid \psi \rangle, \forall \phi, \psi \Rightarrow UU^* = U^*U = \mathbb{1}$
- Automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$: $\alpha(M) = UM$
- Induit automorphisme convexe $\tilde{\alpha}$ sur états traciaux par:

$$\tilde{\alpha}(p)(M) = p(\alpha^{-1}(M)) = \mathrm{tr}(\rho U^* \Pi_M U) = \mathrm{tr}(U\rho U^* \Pi_M).$$

- Se traduit par la transformation réversible

$$\rho \mapsto U\rho U^*$$

sur matrices densité.

Logique quantique standard

- Symétries: $\langle\, U\phi \,|\, U\psi \,\rangle = \langle\, \phi \,|\, \psi \,\rangle, \forall \phi, \psi \Rightarrow UU^* = U^*U = \mathbb{1}$
- Automorphisme $\alpha \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$: $\alpha(M) = UM$
- Induit automorphisme convexe $\tilde{\alpha}$ sur états traciaux par:

$$\tilde{\alpha}(p)(M) = p(\alpha^{-1}(M)) = \mathrm{tr}(\rho U^* \Pi_M U) = \mathrm{tr}(U\rho U^* \Pi_M).$$

- Se traduit par la transformation réversible

$$\rho \mapsto U\rho U^*$$

sur matrices densité.

Logique quantique standard

- État après mesure de l'observable $X = \sum_j \lambda_j \Pi_j$:
  - Classiquement:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \mathbb{P}(\cdot | X = \lambda_j), \quad \text{avec filtage} \\ \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \sum_j \mathbb{P}(\cdot | X = \lambda_j)\mathbb{P}(X = \lambda_j), \text{sans filtrage.} \end{aligned}$$

  - Quantiquement:

$$\begin{aligned} \rho &\mapsto \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)}, \text{avec filtrage} \\ \rho &\mapsto \sum_j \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)} \mathrm{tr}(\rho \Pi_j), \text{(irréversible) sans filtrage.} \end{aligned}$$

Logique quantique standard

- État après mesure de l'observable $X = \sum_j \lambda_j \Pi_j$:
  - Classiquement:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \mathbb{P}(\cdot | X = \lambda_j), \quad \text{avec filtage} \\ \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \sum_j \mathbb{P}(\cdot | X = \lambda_j)\mathbb{P}(X = \lambda_j), \text{sans filtrage.} \end{aligned}$$

  - Quantiquement:

$$\begin{aligned} \rho &\mapsto \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)}, \text{avec filtrage} \\ \rho &\mapsto \sum_j \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)} \mathrm{tr}(\rho \Pi_j), \text{(irréversible) sans filtrage.} \end{aligned}$$

Logique quantique standard

- État après mesure de l'observable $X = \sum_j \lambda_j \Pi_j$:
  - Classiquement:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \mathbb{P}(\cdot|X=\lambda_j), \quad \text{avec filtage} \\ \mathbb{P}(\cdot) &\mapsto \sum_j \mathbb{P}(\cdot|X=\lambda_j)\mathbb{P}(X=\lambda_j), \text{sans filtrage.} \end{aligned}$$

  - Quantiquement:

$$\begin{aligned} \rho &\mapsto \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)}, \text{avec filtrage} \\ \rho &\mapsto \sum_j \frac{\Pi_j \rho \Pi_j}{\mathrm{tr}(\rho \Pi_j)} \mathrm{tr}(\rho \Pi_j), \text{(irréversible) sans filtrage.} \end{aligned}$$

Mesures à valeurs oprérateurs positifs

Transformation la plus générale MVOP:
$\Phi : \mathcal{D}(\mathbb{H}) \ni \rho \mapsto \sum_{i\in I} S_i \rho S_i^*$, avec $(S_i)_i$ isometries partielles vérifiant $\sum_{i\in I} S_i S_i^* \leq \mathbb{1}$.
Connexion avec C^*-algèbre de Cuntz rencontrée en

- Espaces de décalage non-commutatif
- Chaînes de Markov topologiques
- Graphes orientés
- Ondelettes
- Pavages
- ...

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commuative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commuative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

$*$-algèbres

Définition: Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathfrak{A}$, muni d'une opération interne $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ est appelé algèbre.

- l'algèbre est commutative si $ab = ba$;
- l'algèbre est unifère s'il existe $e \in \mathfrak{A} \equiv \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ tel que $ae = ea = a$.

Définition: Une algèbre munie d'une involution, i.e. une opération $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ vérifiant

- $(\lambda a + \mu b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^*$,
- $(ab)^* = b^* a^*$ et
- $(a^*)^* = a$,

est dite $*$-algèbre ou involutive.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = 1\!\!1_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = 1\!\!1_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

C^*-algèbres

Soit $\mathfrak{A}$ une $*$-algèbre. $a \in \mathfrak{A}$ est dit

- normal si $aa^* = a^*a$,
- isométrique si $a^*a = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- unitaire si $a^*a = aa^* = \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$,
- auto-adjoint si $a = a^*$.
- positif s'il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $a = b^*b$.

Définition: Une algèbre involutive, normée de Banach est dite B^*-algèbre. Si en outre elle vérifie $\|a^*a\| = \|a\|^2$ elle est dite C^*-algèbre.

Exemples

Exemple 1:

- $\mathbb{X}$ espace topologique compact de Hausdorff,
- $C(\mathbb{X}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{C},\ \text{continue}\}$,

$C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre commutative pour $f^* = \overline{f}$ et $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{X}\}$.

Exemple 2:

- $\mathbb{H}$ espace de Hilbert,
- $\mathfrak{B}(\mathbb{H}) = \{T : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \text{t.q. } \|T\| < \infty\}$

$\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ est une C^*-algèbre non-commutative dès que $\dim \mathbb{H} > 1$

Exemples

Exemple 1:

- $\mathbb{X}$ espace topologique compact de Hausdorff,
- $C(\mathbb{X}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{C},\ \text{continue}\}$,

$C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre commutative pour $f^* = \overline{f}$ et $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{X}\}$.

Exemple 2:

- $\mathbb{H}$ espace de Hilbert,
- $\mathfrak{B}(\mathbb{H}) = \{T : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \text{t.q. } \|T\| < \infty\}$

$\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ est une C^*-algèbre non-commutative dès que $\dim \mathbb{H} > 1$

Exemples

Exemple 1:

- $\mathbb{X}$ espace topologique compact de Hausdorff,
- $C(\mathbb{X}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{C},\ \text{continue}\}$,

$C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre commutative pour $f^* = \overline{f}$ et $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{X}\}$.

Exemple 2:

- $\mathbb{H}$ espace de Hilbert,
- $\mathfrak{B}(\mathbb{H}) = \{T : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \text{t.q. } \|T\| < \infty\}$

$\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ est une C^*-algèbre non-commutative dès que $\dim \mathbb{H} > 1$

Exemples

Exemple 1:

- $\mathbb{X}$ espace topologique compact de Hausdorff,
- $C(\mathbb{X}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{C},\ \text{continue}\}$,

$C(\mathbb{X})$ est une C^*-algèbre commutative pour $f^* = \overline{f}$ et $\|f\| = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{X}\}$.

Exemple 2:

- $\mathbb{H}$ espace de Hilbert,
- $\mathfrak{B}(\mathbb{H}) = \{T : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \text{t.q. } \|T\| < \infty\}$

$\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ est une C^*-algèbre non-commutative dès que $\dim \mathbb{H} > 1$.

Représentations d'une C^*-algèbre

Définition:

- $\mathfrak{A}$ une C^*-algèbre,
- $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert,

Un $*$-homomorphisme[1] $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathbb{H})$ est appelé représentation de $\mathfrak{A}$, notée $(\pi, \mathbb{H}_\pi)$.

Exemple: $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de probabilité, où $\mathbb{X}$ espace topologique compact de Hausdorff et $\mathcal{X}$ sa tribu borélienne. Soient

- $\mathfrak{A} = C(\mathbb{X})$,
- $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$.

$\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathbb{H})$ définie par

$$\pi(f)\psi(x) = f(x)\psi(x), f \in \mathfrak{A}, \psi \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{X},$$

est une représentation.

[1] $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ et $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.

États sur une C^*-algèbre

Définition: Une fonctionnelle linéaire $\sigma : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall a \in \mathfrak{A}$ on ait $\sigma(a^* a) \geq 0$ est appelée état. Si l'algèbre est unifère et $\sigma(\mathbb{1}) = 1$ alors l'état est normalisé (probabilité).

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathfrak{A}, \exists b, b' \in \mathfrak{A}_h \quad &: \quad a = b + ib' \\ &\Rightarrow \quad a^* = b - ib' \\ &\Rightarrow \quad \sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} \\ &\Rightarrow \quad \sigma(a) \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathfrak{A}_h. \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorème de Gelfand-Neumark-Segal (GNS)

Proposition: Si $\pi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{H})$ une représentation et $\psi \in \mathbb{H}$ avec $\|\psi\| = 1$ alors

$$\mathfrak{A} \ni a \mapsto \sigma(a) \equiv \langle\, \psi \,|\, \pi(a)\psi \,\rangle \in \mathbb{C}$$

est un état sur $\mathfrak{A}$.

Théorème (GNS): Tout état s'écrit sous cette forme.

Foncteurs covariants et contravariants

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_+(\mathcal{X}_0) \arrow[r, "\mathcal{M}P"] & \mathcal{M}_+(\mathcal{X}_1) \arrow[r] & \cdots \\
(\mathbb{X}_0, \mathcal{X}_0) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "C"'] & (\mathbb{X}_1, \mathcal{X}_1) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r] \arrow[d, "C"'] & \cdots \\
C(\mathbb{X}_0) \cong \mathfrak{A}_0 \arrow[d, "X_0"'] & C(\mathbb{X}_1) \cong \mathfrak{A}_1 \arrow[l, "CP"'] \arrow[d, "X_1"'] & \cdots \arrow[l] \\
\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0) & \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Foncteurs covariants et contravariants

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_+(\mathcal{X}_0) \arrow[r, "\mathcal{M}P"] & \mathcal{M}_+(\mathcal{X}_1) \arrow[r] & \dots \\
(\mathbb{X}_0, \mathcal{X}_0) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "C"'] & (\mathbb{X}_1, \mathcal{X}_1) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r] \arrow[d, "C"'] & \dots \\
C(\mathbb{X}_0) \cong \mathfrak{A}_0 \arrow[d, "X_0"'] & C(\mathbb{X}_1) \cong \mathfrak{A}_1 \arrow[l, "CP"'] \arrow[d, "X_1"'] & \dots \arrow[l] \\
\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0) & \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \arrow[l] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Foncteurs covariants et contravariants

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_+(\mathcal{X}_0) \arrow[r, "\mathcal{M}P"] & \mathcal{M}_+(\mathcal{X}_1) \arrow[r] & \ldots \\
(\mathbb{X}_0, \mathcal{X}_0) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "C"'] & (\mathbb{X}_1, \mathcal{X}_1) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r] \arrow[d, "C"'] & \ldots \\
C(\mathbb{X}_0) \cong \mathfrak{A}_0 \arrow[d, "X_0"'] & C(\mathbb{X}_1) \cong \mathfrak{A}_1 \arrow[l, "CP"'] \arrow[d, "X_1"'] & \ldots \arrow[l] \\
\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0) & \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \arrow[l] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Foncteurs covariants et contravariants

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_+(\mathcal{X}_0) \arrow[r, "\mathcal{M}P"] & \mathcal{M}_+(\mathcal{X}_1) \arrow[r] & \ldots \\
(\mathbb{X}_0, \mathcal{X}_0) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r, "P"] \arrow[d, "C"'] & (\mathbb{X}_1, \mathcal{X}_1) \arrow[u, "\mathcal{M}"] \arrow[r] \arrow[d, "C"'] & \ldots \\
C(\mathbb{X}_0) \cong \mathfrak{A}_0 \arrow[d, "X_0"'] & C(\mathbb{X}_1) \cong \mathfrak{A}_1 \arrow[l, "CP"'] \arrow[d, "X_1"'] & \ldots \arrow[l] \\
\mathfrak{B}(\mathcal{H}_0) & \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \arrow[l] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Chaîne de Markov classique

- $\mathbb{H}_i = L^2(\mathbb{X}_i, \mathcal{X}_i, \mu_i)$, $i = 0, 1$.
- $\forall a_0 \in \mathfrak{A}_0$, considérer la représentation $X_0 : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}(\mathbb{H}_0)$ et sa décomposition spectrale $X_0 = \int x_0 \Pi_{X_0}(dx_0)$.
- $\exists \psi \in \mathbb{H}_0$, tel que l'état μ sur $\mathfrak{A}_0$ vérifie:

$$\begin{aligned}\mu(a_0) &= \langle \psi \mid a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\ &= \langle \psi \mid a_0(X_0)\psi \rangle \\ &= \int a_0(x_0) \langle \psi \mid \Pi_{X_0}(dx_0)\psi \rangle.\end{aligned}$$

Chaîne de Markov classique

- $\mathbb{H}_i = L^2(\mathbb{X}_i, \mathcal{X}_i, \mu_i)$, $i = 0, 1$.
- $\forall a_0 \in \mathfrak{A}_0$, considérer la représentation $X_0 : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}(\mathbb{H}_0)$ et sa décomposition spectrale $X_0 = \int x_0 \Pi_{X_0}(dx_0)$.
- $\exists \psi \in \mathbb{H}_0$, tel que l'état μ sur $\mathfrak{A}_0$ vérifie:

$$\begin{aligned} \mu(a_0) &= \langle \psi \mid a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\ &= \langle \psi \mid a_0(X_0)\psi \rangle \\ &= \int a_0(x_0) \langle \psi \mid \Pi_{X_0}(dx_0)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Chaîne de Markov classique

- $\mathbb{H}_i = L^2(\mathbb{X}_i, \mathcal{X}_i, \mu_i)$, $i = 0, 1$.
- $\forall a_0 \in \mathfrak{A}_0$, considérer la représentation $X_0 : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{B}(\mathbb{H}_0)$ et sa décomposition spectrale $X_0 = \int x_0 \Pi_{X_0}(dx_0)$.
- $\exists \psi \in \mathbb{H}_0$, tel que l'état μ sur $\mathfrak{A}_0$ vérifie:

$$\begin{aligned} \mu(a_0) &= \langle \psi \mid a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\ &= \langle \psi \mid a_0(X_0)\psi \rangle \\ &= \int a_0(x_0) \langle \psi \mid \Pi_{X_0}(dx_0)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Chaîne de Markov classique (suite)

- $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_1, \mathcal{X}_0 \otimes \mathcal{X}_1, \mathbb{P})$.
-

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a_0 \otimes a_1) &= \int \mu(dx_0) a_0(x_0) P a_1(x_0) \\
&= \langle \psi \,|\, a_1 \circ X_1 a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\
&= \langle \psi \,|\, (P a_1) a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\
&= \int P a_1(x_0) a_0(x_0) \langle \psi \,|\, \Pi_{X_0}(dx_0) \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Chaîne de Markov classique (suite)

- $\mathbb{H} = L^2(\mathbb{X}_0 \times \mathbb{X}_1, \mathcal{X}_0 \otimes \mathcal{X}_1, \mathbb{P})$.
-

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(a_0 \otimes a_1) &= \int \mu(dx_0) a_0(x_0) P a_1(x_0) \\
&= \langle \psi \,|\, a_1 \circ X_1 a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\
&= \langle \psi \,|\, (P a_1) a_0 \circ X_0 \psi \rangle \\
&= \int P a_1(x_0) a_0(x_0) \langle \psi \,|\, \Pi_{X_0}(dx_0) \psi \rangle .
\end{aligned}
$$

Produit tensoriel

Définition: Soient $\mathbb{V}$ et $\mathbb{V}'$ deux espaces vectoriels. Leur produit tensoriel est

- un espace vectoriel, noté $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}'$,
- et une application bilinéaire notée $\otimes : \mathbb{V} \times \mathbb{V}' \to \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}'$

tels que pour tout espace vectoriel $\mathbb{W}$ et toute application bilinéaire $\beta : \mathbb{V} \times \mathbb{V}' \to \mathbb{W}$, il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}' \to \mathbb{W}$ vérifiant: $\beta(v, v') = f(v \otimes v')$.

Si $(e_{i,j}, j = 1, 2, \ldots)$ base orthonormale de $\mathbb{H}_i$, $i = 1, \ldots, n$, alors $(e_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes e_{n,j_n}, j_1 = 1, 2, \ldots, \ldots, j_n = 1, 2, \ldots)$ base orthonormale de $\otimes_{i=1}^n \mathbb{H}_i$.

Opérateurs sur le produit tensoriel

Proposition: Si $T_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, il existe un unique $T \in \mathfrak{B}(\mathbb{H})$, où $\mathbb{H} = \otimes_{i=0}^n \mathbb{H}_i$, tel que

$$T \otimes_{i=0}^n \psi_i = \otimes_{i=0}^n T_i \psi_i, \forall \psi_i \in \mathbb{H}_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

On écrit $T = \otimes_{i=0}^n T_i$.

Proposition: Soit $T \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2)$. Il existe un unique opérateur $T_1 \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}_1)$ tel que

$$\mathrm{tr}(T_1 X) = \mathrm{tr}(TX \otimes \mathbb{1}_2), \ \forall X \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}_1).$$

Si T est une matrice densité, alors T_1 l'est aussi.

Espérance conditionnelle

Proposition: Soient $\mathbb{H}_i, i = 1, 2$ et $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$.

1. Pour tout opérateur $\rho \in \mathfrak{T}(\mathbb{H}_2)$, il existe une unique application linéaire $\mathbb{E}_\rho : \mathfrak{B}(\mathbb{H}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{H}_1)$, érifiant:

$$\langle \psi \,|\, \mathbb{E}_\rho(X)\psi' \rangle = \operatorname{tr}\left(X(|\, \psi' \rangle\langle \psi \,| \otimes \rho)\right), \ \forall \psi, \psi' \in \mathbb{H}_1, X \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}),$$

où $\|\mathbb{E}_\rho(X)\| \leq \|\rho\|_1 \|X\|$.

2. Si ρ est un état, alors $\mathbb{E}_\rho$ est l'espérance conditionnelle de $\mathfrak{B}(\mathbb{H})$ sur $\mathfrak{B}(\mathbb{H}_1)$. Elle vérifie:
   - $\mathbb{E}_\rho(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, $\mathbb{E}_\rho(X^*) = (\mathbb{E}_\rho(X))^*$, $\|\mathbb{E}_\rho(X)\| \leq \|X\|$.
   - $\mathbb{E}_\rho\left((A \otimes \mathbb{1}_2)X(B \otimes \mathbb{1}_2)\right) = A\mathbb{E}_\rho(X)B$, $\forall A, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}_1), X \in \mathfrak{B}(\mathbb{H})$.
   - $\sum_{1 \leq i,j \leq k} Y_i^* \mathbb{E}_\rho(X_i^* X_j) Y_j \geq 0, \forall X_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}), Y_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}_1)$. Propriété de complète positivité. En particulier: $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}_\rho(X) \geq 0$.

Filtrations quantiques

Proposition: Soit $(\mathbb{H}_n)_{n\geq 0}$ une famille d'espaces de Hilbert. Noter:

$$\mathbb{H}_{n]} = \mathbb{H}_0 \otimes \cdots \otimes \mathbb{H}_n, \, n = 1, 2, \ldots$$

et

$$\mathbb{H}_{[n+1} = \mathbb{H}_{n+1} \otimes \mathbb{H}_{n+2} \otimes \cdots \,, n = 1, 2, \ldots.$$

On définit

- la filtration du passé: la suite croissante de $*$-algèbres $\mathfrak{B}_{n]} = \{X \otimes \mathbb{1}_{[n+1}, X \in \mathfrak{B}(\mathbb{H}_{n]})\}$ et
- la tribu du présent: $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}(\mathbb{H}_{n]})$ et $\mathfrak{B}_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n$.

Il existe une unique famille d'applications linéaires $\mathbb{E}_{n]} : \mathfrak{B}_\infty \to \mathfrak{B}_{n]}$ vérifiant pour $X \in \mathfrak{B}_\infty$:

Filtrations quantiques (suite)

- $\mathbb{E}_{n]} 1\!\!1_{[0} = 1\!\!1_{n]}$,
- $\mathbb{E}_{n]}(AXB) = A\mathbb{E}_{n]}(X)B$, pour $A, B \in \mathfrak{B}_{n]}$,
- si $m \leq n$ alors, $\mathbb{E}_{m]}\mathbb{E}_{n]} = \mathbb{E}_{n]}\mathbb{E}_{m]} = \mathbb{E}_{m]}$.

Définition: Une suite $(X_n)_n$ avec $X_n \in \mathfrak{B}_\infty$ est

- adaptée à la filtration $(\mathfrak{B}_{n]})_n$ si $X_n \in \mathfrak{B}_{n]}$ pour tout n.
- une martingale si $\mathbb{E}_{n-1]}(Xn) = X_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Chaînes de Markov quantiques

Soient $\mathbb{H}$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{H})$ la tribu des observables bornées sur $\mathbb{H}$. On introduit, pour tout n, la famille de $*$-homomorphismes

$$j_n : \mathfrak{B} \to \mathbb{1}_{n-1]} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathbb{1}_{[n+1}$$

Une application bilinéaire $\mathcal{E} : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ est une espérance conditionnelle si elle est complètement positive et préserve l'identité. Un état σ sur $\otimes_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{B}$ est dit markovien s'il existe un état initial μ sur $\mathfrak{B}$ tel que:

$$\sigma(j_0(a_0)\cdots j_n(a_n)) = \mu(\mathcal{E}(a_0 \otimes \mathcal{E}(a_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}(a_{n-1} \otimes \mathcal{E}(a_n \otimes \mathbb{1}))\cdots).$$

La famille d'homomorphismes (j_n) est appelée chaîne de Markov quantique.