

**Journal de bord du module****Statistique mathématique**

Les renvois de la table de matières sont cliquables.

Dernière mise à jour : 11 janvier 2012.

**Table des matières**

<b>1</b>	<b>Modèle statistique et illustration simple</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappels sur les convergences</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Autour de la loi gaussienne</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Estimation non paramétrique</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Fondements de la statistique</b>	<b>4</b>
5.1	Modèles dominés et familles exponentielles . . . . .	4
5.2	Théorie de la décision . . . . .	4
5.3	Exhaustivité . . . . .	4
5.4	Complétude . . . . .	5
5.5	Théorie des estimateurs ponctuels . . . . .	5
<b>A</b>	<b>Quelques rappels sur l'espérance conditionnelle</b>	<b>5</b>
<b>B</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>6</b>
<b>C</b>	<b>Exercices</b>	<b>6</b>

**1** **Modèle statistique et illustration simple**

- Rappels sur le cadre axiomatique de Kolmogorov concernant les probabilités et les variables aléatoires.
- Espace statistique
- Espace des paramètres
- Espace des décisions

- Statistique
- Schéma de Bernoulli
  - Estimation
  - Localisation
  - Test d'hypothèses

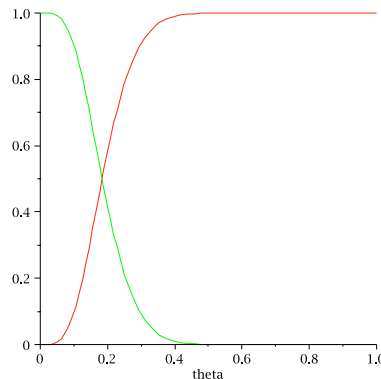


FIGURE 1 – Soit  $K_n$  une variable aléatoire distribuée selon la loi  $\mathcal{B}(n, \theta)$  avec  $n = 25$  et  $\theta \in [0, 1]$ . La figure représente les probabilités  $p(\theta) = \mathbb{P}_\theta(K_n \geq k_0)$  (en rouge) et  $q(\theta) = 1 - \mathbb{P}_\theta(K_n \geq k_0)$  (en vert) avec  $k_0 = 5$  pour les différentes valeurs de  $\theta$ . On constate que pour tout  $\theta \in [0, \theta_0]$ , avec  $\theta_0 = 0.05$ , la probabilité  $p(\theta)$  reste inférieure à 0.01, ce qui signifie que la probabilité de commettre une erreur de première espèce est très faible. Cependant pour  $\theta > \theta_0$  mais proche de  $\theta_0$  la probabilité  $q(\theta)$  de commettre une erreur de seconde espèce est substantielle.

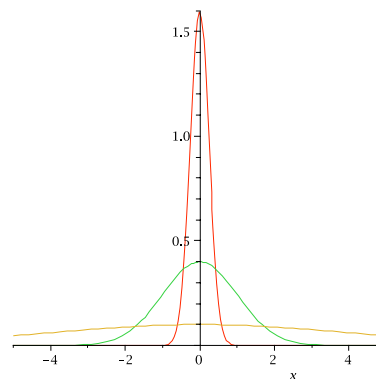


FIGURE 2 – Les densités de la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  avec  $\sigma = 1$  (en vert),  $\sigma = 1/2$  (en rouge) et  $\sigma = 2$  (en orange).

## 2 Rappels sur les convergences

- Formulations équivalentes de la convergence presque sûre.
- Convergence en probabilité.
- La convergence en probabilité est métrisable
- La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité ; la réciproque est fautive en général.
- Si la suite  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$ , de toute suite croissante d'entiers  $(n')$ , on peut extraire une sous-suite  $(n'')$  telle que  $X_{n''}$  converge vers  $X$  presque sûrement.

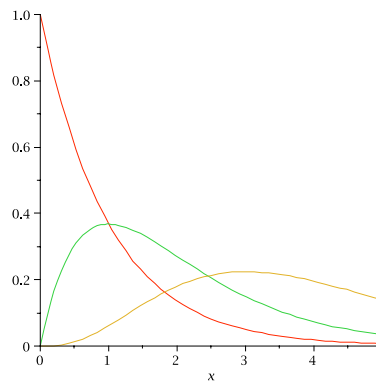


FIGURE 3 – Les densités de la loi  $\gamma_{p,1}$  avec  $p = 1$  (en rouge),  $p = 2$  (en vert) et  $p = 4$  (en orange).

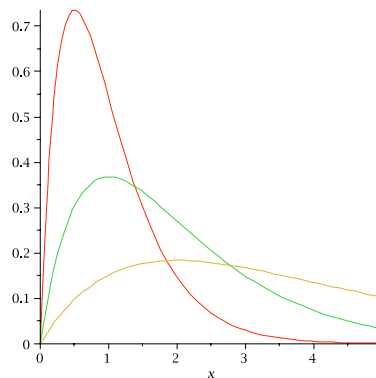


FIGURE 4 – Les densités de la loi  $\gamma_{2,\lambda}$  avec  $\lambda = 2$  (en rouge),  $\lambda = 1$  (en vert) et  $\lambda = 1/2$  (en orange).

- Convergence dans  $L^p$ , avec  $p \in ]0, \infty[$ .
- La convergence dans  $L^p$  entraîne la convergence en probabilité.
- Équi-intégrabilité.
- Si  $X_n \rightarrow X$  en probabilité et  $(X_n)$  équi-intégrable, alors  $X$  intégrable et la convergence a lieu aussi dans  $L^1$ .
- Convergence en loi.
- La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.
- Tension ; convergence étroite ; critères de tension.
- Si une suite de probabilités est équi-tendue et converge faiblement alors elle converge étroitement.
- Convergence  $d$ -dimensionnelles ; critère de Cramér-Wold.

### 3 Autour de la loi gaussienne

- Densité gaussienne  $d$ -dimensionnelle ; matrice de covariance.
- Loi du  $\chi^2$ , de Student, loi  $F$ .
- Si  $(X_i)_{i=1,\dots,n}$  sont indépendantes gaussiennes, leur moyenne empirique et leur variance empirique sont indépendantes.

## 4 Estimation non paramétrique

- Fonction de répartition empirique.
- Théorème de Glivenko-Cantelli.
- Théorème de Kolmogorov-Smirnov (sans démonstration).
- Soit un échantillon de  $n_1 + n_2$  variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de fonction de répartition  $F$  continue. Alors

$$\lim \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_{n_1} - \hat{G}_{n_2}| \stackrel{\text{loi}}{=} \lim \sqrt{n} D_n,$$

où  $\hat{F}_{n_1}$  et  $\hat{G}_{n_2}$  sont les fonctions de répartition empiriques partielles et  $D_n$  la différence apparaissant dans le théorème de Glivenko-Cantelli. La démonstration est faite dans le cas particulier  $n_1 = n_2 = n$  et illustre bien le principe de réflexion.

- Statistique libre ; les statistiques  $D_n$ ,  $D_n^+$ ,  $D_{n_1, n_2}$  et  $D_{n_1, n_2}^+$ , associées à des lois **continues** sont libres.
- Échantillons ordonnés, statistique d'ordre, statistique de rang.

## 5 Fondements de la statistique

### 5.1 Modèles dominés et familles exponentielles

- Domination.
- Si  $\mu$  est une mesure dominante  $\sigma$ -finie, il existe une probabilité qui lui est équivalente.
- Famille exponentielle.
- Espace de paramétrisation naturelle.
- L'espace de paramétrisation naturelle est convexe.
- Complexification de l'espace de paramétrisation ; propriétés d'holomorphicité des espérances en les variables de l'espace de paramètres complexifiées.

### 5.2 Théorie de la décision

- Règle de décision déterministe, stochastique.
- Fonction de perte.
- Risque de la décision.
- $\mathcal{C}$ -optimalité ;  $\mathcal{C}$ -admissibilité.
- Exemples.
- Principe du minimax, principe de Bayes.
- Risque moyenné de Bayes pour des règles de décision déterministes.
- Risque moyenné de Bayes pour des règles de décision stochastiques.

### 5.3 Exhaustivité

- Tribu et statistique exhaustives.

- Théorème de Bahadur.
- Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux statistiques et  $\mu$  une probabilité :  $\sigma(S_1) \subseteq \sigma(S_2) \text{ mod } \mu$  si, et seulement si, il existe une application mesurable  $\psi$  telle que  $S_1 = \psi \circ S_2$ .
- Théorème de Halmos-Savage : Sur un modèle statistique  $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \Pi)$  dominé (avec la probabilité dominante écrite sous la forme  $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \mathbb{P}_n$ ), une sous-tribu  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X}$  est exhaustive si, et seulement si, pour toute  $\mathbb{P} \in \Pi$ , il existe une densité  $\mathcal{F}$ -mesurable, notée  $f_{\mathbb{P}}$ , telle que  $\frac{d\mathbb{P}}{d\nu} = f_{\mathbb{P}}$ ,  $\nu$ -p.s.
- Corollaire : pour une famille exponentielle, dont les densités par rapport à la mesure de référence s'écrivent sous la forme  $f_{\theta}(x) = C(\theta) \exp(\sum_{j=1} c_j(\theta) h_j(x)) h(x)$ , la statistique  $S : x \mapsto (h_1(x), \dots, h_k(x)) \in \mathbb{R}^k$  est exhaustive.
- Exemples.
- Illustration de la notion d'exhaustivité dans un cas discret.

## 5.4 Complétude

- Famille de probabilités et statistique complètes.
- Si  $\Pi$  est complète par rapport à une sous-tribu  $\mathcal{F}$  exhaustive alors  $\mathcal{F}$  est minimalement exhaustive.
- Si une famille exponentielle dont les densités par rapport à une mesure de référence s'écrivent comme  $f_{\theta}(x) = C(\theta) h(x) \exp(\sum_{j=1} c_j(\theta) h_j(x))$  est de rang total, alors la statistique  $S(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$  est complète.

## 5.5 Théorie des estimateurs ponctuels

- Biais.
- Plongement de l'estimation de  $g(\theta)$  dans le cadre de la théorie de la décision.
- Calcul du risque pour des fonctions de perte données par des formes quadratiques.
- Théorème de Rao-Blackwell.
- Théorème de Lehmann-Scheffé ; estimateurs uniformément efficaces.
- Inégalité de Cramér-Rao.
- Matrice d'information de Fisher.
- Critère d'efficacité d'un estimateur par comparaison de son risque avec la borne d'information.
- Exemple de la famille exponentielle.
- Vraisemblance et log-vraisemblance.
- Estimateur du maximum de vraisemblance.

## A Quelques rappels sur l'espérance conditionnelle

- Projection dans un espace de Hilbert.
- Théorème de Kolmogorov sur l'espérance conditionnelle.
- Démonstration de l'existence et de l'unicité de l'espérance conditionnelle par une méthode basée sur la projection hilbertienne.
- Loi conditionnelle ; noyau stochastique.

## B Bibliographie

La référence de base est indiquée en **caractères gras**.

P. Billingsley, Probability and measure. Third edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley, New York (1995).

D. Dacunha-Castelle, M. Duflo, Probabilités et statistique, vol. 1, Masson, Paris (1982).

**D. Fourdrinier, Statistique inférentielle, Dunod, Paris (2002).**

E.L. Lehmann, Testing statistical hypotheses, Chapman and Hall, , New York (1986).

## C Exercices

**Recueil d'exercices**