Journal de bord du module
Chaînes de Markov sur des espaces mesurables
Les renvois de la table de matières ainsi que le texte en couleur magenta sont cliquables.

Table des matières

1 Correction de l'examen du vendredi 13 novembre 2015.

Quelques indications pour le problème.

2 Pré-requis

Un premier cours sur les martingales en temps discret comme exposé dans les chapitres 10–14 de Williams.

3 État d'avancement des notes du cours

Les chapitres 1–5 des notes du cours sont stabilisés. Les autres chapitres sont incomplets ou non encore corrigés.

4 Programme détaillé du cours

4.1 Introduction

— Quelques rappels sur les probabilités conditionnelles.
— Probabilité conditionnelle régulière.
— Une probabilité conditionnelle régulière existe sur un espace standard de Borel (sans démonstration).
— Un exemple d'illustration simple. ← Fin du cours du 9 septembre 2015.

4.2 Noyaux de transition

— Notation (conventions du livre de D. Revuz).
— Noyaux de transition $(\mathbb{X},\mathscr{X}) \overset{N}{\rightsquigarrow} (\mathbb{X}',\mathscr{X}')$.
— Noyaux positifs, σ-finis, propres, bornés.
— Action covariante sur de mesures $\mu \in \mathscr{M}_+(\mathscr{X})$, contravariante sur de fonctions $f \in m\mathscr{X}'_+$.
— Noyaux intégraux, noyaux de convolution, noyaux ponctuels.
— Composition des noyaux.
— Noyaux sous-markoviens, extension de l'espace des états, noyaux markoviens. ← Fin du cours du 11 septembre 2015.

4.3 Espace des trajectoires

— Motivation, espace minimal de probabilités.
— Espace des trajectoires.
— Théorème d'Ionescu Tulcea.
— Définition d'un processus stochastique.
— Réalisation canonique d'un processus stochastique à l'aide des applications coordonnées.
— Chaînes de Markov, chaînes de Markov temporellement homogènes.
— Propriété faible de Markov. ← Fin du cours du 15 septembre 2015.
— Temps d'arrêt. Temps de premier retour, temps de première entrée, temps de vie.
— Propriété forte de Markov.

— Exemples de chaînes de Markov.

4.4 Chaînes de Markov sur des espaces d'états finis

— Rappels d'algèbre linéaire : multiplicités d'une valeur propre (algébrique, géométrique, généralisée).
— Valeurs propres semi-simples.
— Théorème spectral. ← Fin du cours du 16 septembre 2015.
— Matrices positives, théorèmes de Perron-Frobenius.
— Décomposition spectrale de la matrices stochastique dans le cas général, spectre périphérique.
— Convergence exponentielle des P^n en cas d'absence de spectre périphérique, convergence polynômiale des moyennes de Cesàro des P^n.
— Principes d'une simulation Monte Carlo. Construction d'une chaîne de Markov ayant une mesure invariante donnée. Exemple : algorithme de simulation stochastique de marches aléatoires sans recoupement. ← Fin du cours du 25 septembre 2015.

4.5 Théorie du potentiel

— Noyau potentiel, fonctions (mesures) harmoniques, surharmoniques.
— Potentiel et charge correspondante.
— Équation de Poisson. Le potentiel d'une fonction mesurable positive est la plus petite fonction positive solution de l'équation de Poisson
— Principe du maximum.
— Solution probabiliste du problème de Dirichlet.
— Décomposition de Riesz : toute fonction surharmonique finie s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel dû à une charge positive. ← Fin du cours du 28 septembre 2015.
— Rappel sur les martingales équi-intégrables : convergence dans L^1 d'une martingale équi-intégrable et clôture.
— Pour tout mesurable B, L_B est sur-harmonique ; sa partie harmonique est H_B. En outre la surmartingale $(L_B(X_n))$ et la martingale $(H_B(X_n))$ convergent presque sûrement vers l'indicatrice de l'événement $\{\eta(B) = +\infty\}$
— Variables aléatoires asymptotiques, événements asymptotiques, tribu asymptotique, tribu $\mathbb{P}$-asymptotique invariants.
— Chaînes spatio-temporelles.
— Il y une bijection entre les variables aléatoires bornées invariantes et les fonctions harmoniques bornées.
— On a équivalence entre les affirmations : toute fonction harmonique bornée est constante et la tribu de invariantes est triviale.
— Rappel sur les martingales renversées.
— La chaîne de Markov vérifie la propriété de découplage asymptotique si et seulement si la tribu asymptotique est invariante.
— Équivalence entre

1. trivialité de la tribu des invariants de la chaîne spatio-temporelle,
2. trivialité de la tribu asymptotique de la chaîne spatiale,
3. oubli de la condition initiale,
4. constance des fonctions spatio-temporelles harmoniques bornées.

(La démonstration de cette dernière proposition sera terminée la prochaine fois). ← Fin du cours du 30 septembre 2015.
— Fin de la démonstration

4.6 Chaînes sur des espaces infinis dénombrables

— La théorie standard est considérée comme acquise. Seuls quelques rappels des notions importantes sont faits.
— Introduction à la méthode des fonctions de Lyapunov.
— Critère pour récurrence positive : pour une chaîne irréductible X, on a équivalence entre
  1. X récurrente positive, et
  2. Il existe (ε, F, f) avec $\varepsilon > 0$, $F \in \mathscr{X}$ fini et $f \in \mathsf{Dom}_+(P)$ tels que $(P-I)f(y) \leq -\varepsilon$, si $y \notin F$.

  La moitié de la démonstration est faite, l'autre moitié sera finie la semaine prochaine. ← Fin du cours du 02 octobre 2015.
— Critère pour transience : pour une chaîne irréductible X, on a équivalence entre
  1. X transiente, et
  2. Il existe (A, f) avec $A \in \mathscr{X}$ et $f \in \mathsf{Dom}_+(P)$ tels que
     — $(P-I)f(y) \leq 0$, si $y \notin A$ et
     — il existe $y \notin A$ tel que $f(y) < \inf_{z \in A} f(z)$. ← Fin du cours du 3 octobre 2014.
— Crtière pour récurrence : pour une chaîne irréductible X, on a équivalence entre
  1. X récurrente, et
  2. Il existe $f \in m\mathscr{X}_+$ qui tend vers l'infini et un $F \in \mathscr{X}$ fini tels que
  3. $\mathbb{E}(f(X_{n+1} - f(X_n)|X_n = y) \leq 0$, si $y \notin F$.

4.7 Chaînes à temps discret et espace général

4.7.1 Irréductibilité sur des espaces généraux

— Définition de ϕ-irréductibilité et ϕ-réccurence. ← Fin du cours du 7 octobre 2015.
— Décomposition du noyau markovien en une partie absolument continue et une partie singulière par rapport à ϕ.
— Les densités de Radon-Nikodým de la partie absolument continue des $P^n(x, \cdot)$ sont conjointement mesurables.
— Il existe de versions conjointement mesurables des densités p_n qui vérifient la minoration de Chapman-Kolmogorov.
— c-ensembles.
— Si A est tel que $\phi(A) > 0$ et pour tout mesurable $B \subseteq A$, avec $\phi(B) > 0$ on a $L_B(x) > 0$ pour tout $x \in A$ alors A contient un c-ensemble.
— Décomposition cyclique. ← Fin du cours du 9 octobre 2015.

4.7.2 Comportement asymptotique pour des chaînes ϕ-récurrentes

— Si une chaîne est ϕ-récurrente, toutes les fonctions harmoniques bornées sont constantes.

— Trivialité de la tribu asymptotique des chaînes ϕ-récurrentes.
— Oubli de la condition initiale pour des chaînes ϕ-récurrentes. $\leftarrow$ Fin du cours du 12 octobre 2015.

4.7.3 Uniforme ϕ-récurrence

— Oubli exponentiellement rapide de la condition initiale.
— Chaînes plongées, d-ensembles.
— Si une chaîne est ϕ-récurrente, il existe une suite croissante exhaustive des parties de $\mathbb{X}$ dont tous les termes sont des d-ensembles.

4.7.4 Mesures invariantes pour des chaînes ϕ-récurrentes

— Toute chaîne ϕ-récurrente possède une mesure invariante.
— La mesure invariante est unique à des constantes multiplicatives près.
— La mesure de référence est absolument continue par rapport à la mesure invariante. $\leftarrow$ Fin du cours du 14 octobre 2015 et fin du cours pour le semestre.