Journal de bord du module
Statistique mathématique
Les renvois de la table de matières sont cliquables.

Dernière mise à jour : 2 décembre 2009

Table des matières

1 Pré-requis **2**

2 Programme détaillé du cours **2**

2.1 Introduction 2

2.2 Noyaux 2

2.3 Espace des trajectoires 2

2.4 Chaînes de Markov sur des espaces d'états finis 2

2.5 Théorie du potentiel 3

2.6 Chaînes sur des espaces infinis dénombrables 3

2.7 Irréductibilité sur des espaces généraux 4

2.8 Comportement asymptotique pour des chaînes ϕ-récurrentes 4

2.9 Uniforme ϕ-récurrence 4

2.10 Mesures invariantes pour des chaînes ϕ-récurrentes 4

2.11 Chaînes de Markov en temps continu (hors programme) 4

3 Bibliographie commentée **5**

4 Notes du cours **6**

5 Examens des années précédentes et leurs corrigés **6**

1 Pré-requis

Un premier cours sur les martingales en temps discret comme exposé dans les chapitres 10–14 de Williams.

2 Programme détaillé du cours

2.1 Introduction

– Un exemple d'illustration simple

2.2 Noyaux

– Notation (conventions du livre de D. Revuz)
– Noyaux de transition $(\mathbb{X}, \mathscr{X}) \overset{N}{\rightsquigarrow} (\mathbb{X}', \mathscr{X}')$.
– Noyaux positifs, σ-finis, propres, bornés.
– Action covariante sur de mesures $\mu \in \mathscr{M}_+(\mathscr{X})$, contravariante sur de fonctions $f \in m\mathscr{X}'_+$.
– Noyaux intégraux, noyaux de convolution, noyaux ponctuels.
– Composition des noyaux.
– Noyaux sous-markoviens, extension de l'espace des états, noyaux markoviens.
– Noyaux markoviens comme contractions positives.

2.3 Espace des trajectoires

– Motivation, espace minimal de probabilités.
– Espace des trajectoires.
– Énoncé du théorème d'Ionescu Tulceă.
– Définition d'un processus stochastique.
– Réalisation canonique d'un processus stochastique à l'aide des applications coordonnées.
– Chaînes de Markov, chaînes de Markov temporellement homogènes.
– Propriété faible de Markov.
– Propriété forte de Markov.

2.4 Chaînes de Markov sur des espaces d'états finis

– Rappels d'algèbre linéaire : multiplicités d'une valeur propre (algébrique, géométrique, généralisée).
– Matrices positives, théorème de Perron-Frobenius.
– Décomposition spectrale de la matrices stochastique dans le cas général, spectre périphérique.
– Convergence exponentielle des P^n en cas d'absence de spectre périphérique, convergence polynômiale des moyennes de Cesàro des P^n.
– Compléments sur le spectre d'une matrice stochastique : disques de Geršgorin, théorème de Karpelevich.

2.5 Théorie du potentiel

– Noyau potentiel, fonctions (mesures) harmoniques, surharmoniques.
– Potentiel et charge correspondante.
– Équation de Poisson/ Le potentiel d'une fonction mesurable positive est la plus petite fonction positive solution de l'équation de Poisson
– Principe du maximum.
– Solution probabiliste du problème de Dirichlet.
– Décomposition de Riesz : toute fonction surharmonique finie s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel dû à une charge positive.
– Rappel sur les martingales équi-intégrables : convergence dans L^1 d'une martingale équi-intégrable et clôture.
– Pour tout mesurable B, L_B est sur-harmonique ; sa partie harmonique est H_B. En outre la surmartingale $(L_B(X_n))$ et la martingale $(H_B(X_n))$ convergent presque sûrement vers l'indicatrice de l'événement $\{\eta(B) = +\infty\}$
– Variables aléatoires asymptotiques, événements asymptotiques, tribu asymptotique, tribu $\mathbb{P}$-asymptotique ; invariants.
– Chaînes spatio-temporelles.
– Il y une bijection entre les variables aléatoires bornées invariantes et les fonctions harmoniques bornées.
– On équivalence entre les affirmations : toute fonction harmonique bornée est constante et la tribu de invariantes est triviale.
– Rappel sur les martingales renversées.
– La chaîne de Markov vérifie la propriété de découplage asymptotique si et seulement si la tribu asymptotique est invariante.
– Équivalence entre
  1. trivialité de la tribu des invariants de la chaîne spatio-temporelle,
  2. trivialité de la tribu asymptotique de la chaîne spatiale,
  3. oubli de la condition initiale,
  4. constance des fonctions spatio-temporelles harmoniques bornées.

2.6 Chaînes sur des espaces infinis dénombrables

– Rappels sur la classification des états, les propriétés de récurrence, transience, les mesures invariantes, la convergence à l'équilibre.
– Introduction à la méthode des fonctions de Lyapunov.
– Critère de Foster : pour une chaîne irréductible X, on a équivalence entre
  1. X récurrente positive, et
  2. Il existe $f \in m\mathscr{X}_+$, $\varepsilon > 0$, $F \in \mathscr{X}$ fini tels que
     – $\mathbb{E}(f(X_{n+1} - f(X_n)|X_n = y) \leq -\varepsilon$, si $y \notin F$ et
     – $\mathbb{E}(f(X_{n+1}|X_n = y) < \infty$ si $y \in F$.
– Critère de Foster pour transience.
– Crtière de Foster pour récurrence nulle.
– Estimation des moments du temps de passage.

2.7 Irréductibilité sur des espaces généraux

- Définition de ϕ-irréductibilité et ϕ-réccurence.
- Décomposition du noyau markovien en une partie absolument continue et une partie singulière par rapport à ϕ.
- Les densités de Radon-Nikodým de la partie absolument continue des $P^n(x,\cdot)$ sont conjointement mesurables.
- Il existe de versions conjointement mesurables des densités p_n qui vérifient la minoration de Chapman-Kolmogorov.
- Si A est tel que $\phi(A) > 0$ et pour tout mesurable $B \subseteq A$, avec $\phi(B) > 0$ on a $L_B(x) > 0$ pour tout $x \in A$ alors A contient un C-ensemble.
- Décomposition cyclique.

2.8 Comportement asymptotique pour des chaînes ϕ-récurrentes

- Trivialité de la tribu asymptotique des chaînes ϕ-irréductibles.
- Oubli de la condition initiale pour des chaînes ϕ-irréductibles.

2.9 Uniforme ϕ-récurrence

- Oubli exponentiellement rapide de la condition initiale.
- Chaînes plongées, d-ensembles.
- Si une chaîne est ϕ-récurrente, il existe une suite croissante exhasutive des parties de $\mathbb{X}$ dont tous les termes sont des d-ensembles.

2.10 Mesures invariantes pour des chaînes ϕ-récurrentes

- Toute chaîne ϕ-récurrente possède une mesure invariante.
- La mesure invariante est unique à des constantes multiplicatives près.
- La mesure de référence est absolument continue par rapport à la mesure invariante.
- Énoncé de quelques théorèmes ergodiques.

2.11 Chaînes de Markov en temps continu (hors programme)

- Description en termes d'une suite de temps de séjour et de la chaîne plongée aux instants de sauts.
- Générateur Γ du processus.
- Explosion, critère d'explosion de Chung.
- Quelques résultats récents sur les moments du temps d'explosion obtenus par des méthodes de fonctions de Lyapunov.

3 Bibliographie commentée

Döblin, Wolfgang, Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff. Ann. École Norm. (3) 57, (1940). 61–111. L'article est disponible ici. Une référence historique, très clairement écrite.

Duflo, Marie, Méthodes récursives aléatoires. Techniques Stochastiques. Masson, Paris, 1990. xiv+361 pp. ISBN : 2-225-82214-X. Une bonne référence pour des chaînes à espaces d'états général.

Hennion, Hubert ; Hervé, Loïc, Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness. Lecture Notes in Mathematics, 1766. Springer-Verlag, Berlin, 2001. viii+145 pp. ISBN : 3-540-42415-6. Une très bonne référence pour une approche basée sur l'étude fine du spectre de l'opérateur de Markov.

Iosifescu, Marius, Finite Markov processes and their applications. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester ; Editura Tehnică, Bucharest, 1980. 295 pp. ISBN : 0-471-27677-4. Traité très exaustif pour les chaînes de Markov à espace d'états fini.

Kemeny, John G. ; Snell, J. Laurie ; Knapp, Anthony W., Denumerable Markov chains. Second edition. With a chapter on Markov random fields, by David Griffeath. Graduate Texts in Mathematics, No. 40. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976. xii+484 pp. Référence très complète sur les chaînes à espace d'états dénombrable ; elle traite assez exhaustivement les problèmes de chaînes transientes qui ne sont pas abordées dans ce cours.

Meyn, S. P. ; Tweedie, R. L., Markov chains and stochastic stability. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1993. xvi+ 548 pp. ISBN : 3-540-19832-6. Un livre très complet sur les chaînes de Markov en général. Plusieurs exemples d'application.

Neveu, Jacques, Bases mathématiques du calcul des probabilités. Préface de R. Fortet. Deuxième édition, revue et corrigée Masson et Cie, Éditeurs, Paris 1970 xii+213 pp. Une très bonne référence pour la théorie des probabilités. Son utilité pour ce cours est de fournir une référence facile à trouver du théorème d'Ionescu Tulceă et de sa démonstration.

Norris, J. R., Markov chains. Reprint of 1997 original. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. xvi+237 pp. ISBN 0-521-48181-3. Référence très pédogogique sur les chaînes de Markov à espace des états discret tant en temps discret que continu.

Nummelin, Esa, General irreducible Markov chains and nonnegative operators. Cambridge Tracts in Mathematics, 83. Cambridge University Press, Cambridge, 1984. xi+156 pp. ISBN : 0-521-25005-6. Une excellente référence sur les chaînes à espace d'états général privilégiant l'approche opératorielle.

Orey, Steven, Lecture notes on limit theorems for Markov chain transition probabilities. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, No. 34. Van Nostrand Reinhold Co., London-New York-Toronto, Ont., 1971. viii+108 pp. L'introduction la plus concise à la théorie des chaînes de Markov sur des espaces généraux que je connaisse !

Revuz, D., Markov chains. Second edition. North-Holland Mathematical Library, 11. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984. xi+374 pp. ISBN : 0-444-86400-8. Un ouvrage très complet sur les chaînes sur des espaces généraux, y compris des espaces munis d'une structure de groupe topologique.

Williams, David, Probability with martingales. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University

Press, Cambridge, 1991. xvi+251 pp. ISBN : 0-521-40455-X ; 0-521-40605-6. Une excellente introduction pédagogique à la théorie des martingales à temps discret.

4 Notes du cours

Les notes du cours seront disponibles au fur et à mesure ici.

Dernière mise à jour : 25 novembre 2009. Chapitres mis à jour : chapitres 1–5, paragraphes 6.1–6.6, chapitres 8–11 et annexes A–C.

5 Examens des années précédentes et leurs corrigés

– Examen de l'année 2006–2007 ; Corrigé.
– Examen de l'année 2007–2008 ; Corrigé..
– Examen de l'année 2007–2008 ; Corrigé.
– Le sujet d'examen de l'année 2009-2010 sera disponible après l'examen.