UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Licence STS mention mathématiques

Théorie de la mesure

Intégration de Lebesgue

Recueil d'exercices

UFR Mathématiques

Année universitaire 2010–2011

Table des matières

Convention : Plusieurs énoncés d'exercices, durant toute l'année universitaire, poseront simplement la question “Vrai ou faux”. Il sera toujours sous-entendu que la réponse doit être justifiée soit en donnant une brève démonstration ou en rappelant l'énoncé précis d'un théorème soit en donnant un contre-exemple.

Tous les exercices ne seront pas nécessairement traités en séance de travaux dirigés.

1 Rappels

1.1 Résultats élementaires de convergence

1. Soit (f_n) une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que la suite converge simplement vers f. Vrai ou faux ?
   (a) si toutes les f_n sont croissantes alors f est croissante
   (b) si toutes les f_n sont bornées alors f est bornée
   (c) si toutes les f_n sont continues alors f est continue
   (d) si toutes les f_n sont dérivables alors f est dérivable
2. Vrai ou faux ?
   (a) La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
   (b) La convergence uniforme est équivalente à la convergence simple.
3. Soit (f_n) la famille d'applications $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ définies par la formule $f_n(x) = x^n$. Est-il vrai ou faux que la suite converge uniformément sur $\mathbb{X}$ pour
   (a) $\mathbb{X} = [0,1]$
   (b) $\mathbb{X} = [0,1[$
   (c) $\mathbb{X} = [0,a]$, pour $0 < a < 1$
   (d) $\mathbb{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$
   (e) $\mathbb{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$
   (f) $\mathbb{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq a\}$, pour $0 < a < 1$
4. Soit $\mathbb{X}$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$. Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f et que la famille (f_n) soit équicontinue en $x_0 \in \mathbb{X}$. Montrer que f est continue en x_0.
5. Soit (f_n) une suite d'applications $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{X}$, où $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont des parties de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Supposons que a est un point adhérent à $\mathbb{X}$ et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_x f_n(x) = l_n$. Montrer que la suite numérique (l_n) converge et, si on note l sa limite, on a $\lim_x f(x) = l$.
6. Étudier si les suites (f_n), $n \in \mathbb{N}$, définies par les formules suivantes, convergent uniformément
   (a) $x \mapsto f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, sur $]0,\infty[$
   (b) $x \mapsto f_n(x) = x\exp(-nx)$, sur $[0,\infty[$
   (c) $x \mapsto f_n(x) = \frac{x^\alpha}{1+nx}$, sur $[0,\infty[$ pour $\alpha > 0$
7. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{x^2+n^2}$$
   est indéfiniment dérivable.
8. Soit $\alpha > 0$. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} \cdots$$

1.2 Opérations sur les ensembles

1. On considère l'application $f : [-1,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrez que f est surjective. Est-elle injective ?
   (b) Soit $[a,b]$ un intervalle inclu dans $[-1,1]$; calculez $f([a,b])$.
   (c) Soit $[c,d]$ un intervalle de $[0,1]$; calculez $f^{-1}([c,d])$.
   (d) Que peut-on dire de l'image d'un intervalle par une application continue ?
2. On considère l'application $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = x - x^3$.
   (a) Est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Soit $[a,b]$ un intervalle inclu dans $[-1,1]$; calculez $g([a,b])$.
   (c) Soit $[c,d]$ un intervalle inclu dans $[-1,1]$; calculez $g^{-1}([c,d])$.
   (d) Que peut-on dire de l'image réciproque d'un intervalle par une application continue ?
3. On considère l'application $g : [-1,1] \to [-1,1]$ définie par $g(x) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$.
   (a) Est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Soit $[a,b]$ un intervalle inclu dans $[-1,1]$; calculez $g([a,b])$.
   (c) Soit $[c,d]$ un intervalle inclu dans $[-1,1]$; calculez $g^{-1}([c,d])$.
4. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux ensembles et $g : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application injective. Montrez que pour tous sous-ensembles A et B de X, on a : $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$.
5. Donnez un exemple de fonction continue $g : [-1,1] \to [-1,1]$ pour laquelle il existe un intervalle inclu dans $[-1,1]$ dont l'image réciproque par g n'est pas une union finie d'intervalles. A quoi est égal $g^{-1}([-1,1])$?
6. Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux ensembles et f une application de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$.
   – Montrer que pour toute partie $Y \subseteq \mathbb{Y}$, on a $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$. Donner des exemples d'applications f et de partie $X \subseteq \mathbb{X}$ telles que
   $$(i)\ f(X^c) \subseteq (f(X))^c;\ (ii)\ f(X^c) \supseteq (f(X))^c;\ (iii) \text{ aucune inclusion n'est satisfaite.}$$
   – Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathbb{Y}$. Montrer que
   $$f^{-1}(\cup_{i\in I} Y_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(Y_i);\ f^{-1}(\cap_{i\in I} Y_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(Y_i);\ f(\cup_{i\in I} Y_i) = \cup_{i\in I} f(Y_i);\ f(\cap_{i\in I} Y_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(Y_i).$$
   Montrer que la dernière inclusion est en général stricte et qu'il y a égalité si f est injective.
7. Donnez un exemple de suite d'ensembles fermés $A_i \subset \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, inclus dans $\mathbb{R}$ et décroissants pour l'inclusion :
   $$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots A_n \supset A_{n+1} \ldots,$$
   tels que les A_i soient non vides, et $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.
8. Déterminez les ensembles suivants :
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-1/n],\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1/n[,\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [1/n, 1+1/n[,$$
   $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [1/n^2, 10/n],\quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [k-1/n, k+1/n[.$$

9. Soient (f_n) et f des applications de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{k\in\mathbb{N}^*} \cap_{i\geq k}^{\infty} \{x \in \mathbb{X} : |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\}.$$

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction croissante.
    - Montrer que f admet des limites à gauche $\lim_{y\to x^-} f(y)$ et à droite $\lim_{y\to x^+} f(y)$ finies en tout point.
    - Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Indication : considérer, pour $n \geq 1$, les ensembles
    $$A_n = \left\{ x \in [-n,n] : \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$
11. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{R}$ minorées par une constante. Montrer que $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$. Donner un exemple de suites bornées pour lesquelles l'inégalité ci-dessus est stricte.
12. Soit A un sous-ensemble dénombrable de $[0,1]$. Montrez que son complémentaire n'est pas dénombrable. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble et pour chaque $i \in \mathbb{N}$, des sous-ensembles dénombrables A_i et B_i de $\mathbb{X}$. Montrez que l'ensemble $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \times B_i$ est dénombrable.
13. Montrez que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une union dénombrable de pavés ouverts.
14. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des intervalles dont la réunion recouvre $\mathbb{Q}$, i.e. tels que $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{j=1}^n I_j$. Montrez que $\sum_{i=1}^n l(I_j) = \infty$, où $l(\cdot)$ représente la longueur.

2 Théorie de la mesure

2.1 Tribus

1. On considère un ensemble à trois éléments $\mathbb{X} = \{a,b,c\}$. Décrire l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{X})$, puis toutes les tribus de $\mathbb{X}$.
2. On considère l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ qui satisfont la propriété suivante :
$$x \in A \text{ implique } -x \in A.$$
Montrez que cet ensemble de parties est une tribu. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui appartiennent à cette tribu $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, [0,1], \mathbb{Q}, \{x \in \mathbb{R} : x^6 - 9x^2 + 1 = 0\}, \emptyset,]-2,2[, \{-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{2}\}$?
3. On considère les parties du plan $\mathbb{R}^2$ qui peuvent s'écrire comme une union de cercles centrés à l'origine. Montrez que cet ensemble de parties est une tribu. Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui appartiennent à cette tribu $\{(0,0)\}, [-1,1] \times [-1,1], \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}, \{0\} \times \mathbb{R}$?
4. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une application.
    (a) Montrez que l'ensemble des parties de $\mathbb{X}$ de la forme $f^{-1}(B)$, avec B partie quelquonque de $\mathbb{R}$, est une tribu.
    (b) Quelle est la tribu ainsi obtenue lorsqu'on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$?
    (c) Montrez que les éléments de la tribu définie plus haut sont exactement les parties de X qui sont union de lignes de niveau de f.
5. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble, n un entier, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de $\mathbb{X}$ disjointes deux à deux telles que $\mathbb{X} = \sqcup_{i=1}^n A_i$. Quelle est la plus petite tribu contenant tous les A_i ?

6. On considère une tribu de parties de $\mathbb{R}^d$ qui contient les pavés ouverts. Montrez qu'elle contient tous les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$, ainsi que tous les sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$. Donnez des exemples de parties de $\mathbb{R}^d$ qui appartiennent à cette tribu et qui ne sont ni ouvertes ni fermées.
7. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble et $\mathscr{X}$ une tribu de parties de $\mathbb{X}$. Considérons un sous-ensemble $A \subset \mathbb{X}$, et définissons un ensemble $\mathscr{X}_A$ de parties de A comme suit :
$$\mathscr{X}_A = \{B \cap A : B \in \mathscr{X}\}.$$
Montrez que $\mathscr{X}_A$ est une tribu de parties de A. C'est la tribu induite par $\mathscr{X}$ sur le sous-ensemble A.
8. Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{Z}$ telles que, pour $n > 0$, $2n \in A$ si et seulement si $2n+1 \in A$. Montrez que $\mathscr{A}$ est une tribu de parties de $\mathbb{Z}$.

2.2 Algèbres de Boole, tribus, théorèmes de classes monotones

1. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble non-vide arbitraire et $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X})$ une classe de parties de $\mathbb{X}$. Alors $\mathscr{X}$ est **un π-système, une algèbre de Boole ou une tribu** selon que les propriétés suivantes sont vérifiées :

π-système	**algèbre de Boole**	**tribu**
$\mathbb{X} \in \mathscr{X}$	$\mathbb{X} \in \mathscr{X}$	$\mathbb{X} \in \mathscr{X}$
$\mathscr{X}$ stable par intersections finies	$\mathscr{X}$ stable par intersections finies	$\mathscr{X}$ stable par intersections dénombrables
	$A \in \mathscr{X} \Rightarrow A^c \in \mathscr{X}$	$A \in \mathscr{X} \Rightarrow A^c \in \mathscr{X}$

   - Montrer que tribu $\Rightarrow$ algèbre de Boole $\Rightarrow$ π-système.
   - Fournir quelques exemples explicites de chacune des classes dans la définition précédente.
   - Soient $\mathscr{X}_1 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{X}) : A$ dénombrable ou A^c dénombrable $\}$ et $\mathscr{X}_2 = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{X}) : A$ fini ouA^c fini$\}$. De quel type sont-elles les familles $\mathscr{X}_1$ et $\mathscr{X}_2$?
2. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble non-vide arbitraire, $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X})$ une famille de parties de $\mathbb{X}$ et $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathscr{X}$. Alors $\mathscr{X}$ iest **une classe monotone, un système de Dynkin ou un λ-système** selon que les conditions suivantes sont vérifiées :

classe monotone	**système de Dynkin**	**λ-système**
	$\mathbb{X} \in \mathscr{X}$	$\emptyset \in \mathscr{X}$
$A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{X}$	$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{A}$	$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2 \setminus A_1 \in \mathscr{X}$
$A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathscr{X}$	A_n mutuellement disjoints $\Rightarrow \sqcup_n A_n \in \mathscr{X}$	$A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathscr{X}$

   Soit $\mathbb{X}$ un ensemble non-vide $\mathscr{J}$ une famille arbitraire d'indexation d'une famille de classes $(\mathscr{X}_j)_{j \in \mathscr{J}}$, avec $\mathscr{X}_j \in \mathscr{P}(\mathbb{X})$ pour tout $j \in \mathscr{J}$. Montrer que si pour tout $j \in \mathscr{J}$, la classe $\mathscr{X}_j$ est du type : algèbre de Boole, tribu, classe monotone, système de Dynkin, π-système ou λ-système, alors la classe $\cap_{j \in \mathscr{J}} \mathscr{X}_j$ est du même type.
3. Soit $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ une classe arbitraire non-vide de partie de $\mathbb{X}$. Nous appelons **clôture** de type γ, pour $\gamma \in \{\alpha, \sigma, m, \mathscr{D}, \lambda\}$, et nous notons $\gamma(\mathscr{E})$, les ensembles :
   - $\alpha(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{X} : \mathscr{E} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}); \mathscr{X}$ est une algèbre de Boole$\}$,
   - $\sigma(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{X} : \mathscr{E} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}); \mathscr{X}$ est une tribu$\}$,
   - $m(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{X} : \mathscr{E} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}); \mathscr{X}$ est une classe is a monotone$\}$,

– $\mathscr{D}(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{X} : \mathscr{E} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}); \mathscr{X}$ est un système de Dynkin$\}$,
– $\lambda(\mathscr{E}) = \cap\{\mathscr{X} : \mathscr{E} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X}); \mathscr{X}$ est un λ-système$\}$.

Soient γ l'opérateur de clôture défini ci-dessus et $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{X})$. Montrer que
– γ est isotone,
– si $\mathscr{E}$ est une algèbre de Boole, alors $\sigma(\mathscr{E}) = m(\mathscr{E})$,
– si $\mathscr{E}$ est stable pour des intersections finies, alors $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{D}(\mathscr{E})$,
– si $\mathscr{E}$ est un π-système, alors $\sigma(\mathscr{E}) = \lambda(\mathscr{E})$,
– si $\mathscr{E}$ est une class monotone et un système de Dynkin system alors $\mathscr{E}$ est une tribu,
– si $\mathscr{E}$ est un π-système et un λ-système alors $\mathscr{E}$ est une tribue.

2.3 Fonctions d'ensemble, additivité, σ-additivité, mesures

1. Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré et A et B deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{X}$. Montrez que :
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$
2. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et x un élément de $\mathbb{X}$. La mesure de Dirac au point x, notée δ_x, est définie pour tout $A \subset X$ par :
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (a) Montrez que δ_x est bien une mesure définie sur $\mathscr{P}(\mathbb{X})$.
   (b) Quels sont les ensembles qui sont de mesure nulle pour cette mesure ?
3. Soit $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les deux conditions sont équivalentes :
   – μ est une mesure de Dirac.
   – $\mu(\mathscr{X}) = \{0, 1\}$ et $\cap\{A : A \in \mathscr{X}, \mu(A) = 1\} \neq \emptyset$.
4. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et μ la mesure de comptage définie sur $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ par
$$\mu(A) = \begin{cases} \mathsf{card}(A) & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Montrez que μ est bien une mesure. Quels sont les ensembles qui sont de mesure nulle pour cette mesure ?
5. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $\mathscr{X}$ une tribu de parties de $\mathbb{X}$. Soit $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur $\mathscr{X}$. Montrez que $\sum_{k\geq 0} \mu_k$ est une mesure sur $\mathscr{X}$.
6. Soient $\mathbb{X}$ un espace topologique, $\mathscr{X}$ une tribu de parties de $\mathbb{X}$ qui contient les ouverts et μ une mesure sur $\mathscr{X}$. On suppose que pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{X}$ on a $\mu(U) > 0$. Soit A un élément de $\mathscr{X}$ dont le complémentaire est de mesure nulle : $\mu(A^c) = 0$. Montrez que A est dense dans $\mathbb{X}$. *Indication :* un ensemble est dense si et seulement si il intersecte tous les ouverts non vides.

2.4 Mesures extérieures, mesure de Lebesgue

1. Donnez des exemples de sous-ensembles ouverts non bornés de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue est finie.
2. Montrez qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^d$ est dense s'il intersecte tous les ouverts non vides. Montrez qu'un sous-ensemble $A \subset [0, 1]$, tel que $\lambda_{\mathbb{R}}([0, 1] \setminus A) = 0$, est dense dans $[0, 1]$. Que dire de plus si A est fermé ?
3. Montrez qu'un ouvert de $\mathbb{R}^d$, de mesure nulle, est vide. Soit $\varepsilon > 0$; donnez un exemple d'ouvert dense dans $\mathbb{R}^d$ dont la mesure est inférieure à ε.

4. Soit $(U_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $q \in U_q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$; est-il vrai cependant que $\cup_{q\in\mathbb{Q}} U_q = \mathbb{R}$? Peut-on construire une famille d'ouverts tel que $\lambda(\cup_{q\in\mathbb{Q}} U_q) = 0$?
5. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure nulle pour $\lambda_{\mathbb{R}}$, et B un sous-ensemble quelquonque de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \times B$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_{\mathbb{R}^2}(A \times B) = 0$.
6. Le but de cet exercice est de construire un sous-ensemble fermé de $[0,1]$ qui est de mesure nulle, mais qui n'est pas dénombrable.
   - On considère l'ensemble des réels de l'intervalle $[0,1]$ dont la première décimale est égale à 0 ou à 1. Dessinez cet ensemble, calculez sa mesure.
   - On considère une suite finie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'entiers égaux à 0 ou à 1. Montrez que l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement décimal commence par la suite de chiffres $0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ est un intervalle ; calculez sa longueur.
   - On considère l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont les n premières décimales en base 10 sont égales à 0 ou 1. Majorez la mesure de cet ensemble.
   - Montrez que le sous-ensemble de $[0,1]$ composé des nombres réels dont le développement en base 10 ne comporte que des 0 et des 1 est de mesure nulle. Montrez que cet ensemble n'est pas dénombrable. Est-il fermé ? Est-il dense ?
7. Donnez une suite d'ensembles $A_i \subset \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, inclus dans $\mathbb{R}$ et décroissants pour l'inclusion :
$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$$
   tels que $\lambda_{\mathbb{R}}(A_i) = +\infty$, mais $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.
8. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Montrez qu'on peut trouver des ouverts $U_i, i \in \mathbb{N}$, tels que : $A \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i$ et $\lambda_{\mathbb{R}^d}(A) = \lambda_{\mathbb{R}^d}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i\right)$.
9. On considère deux vecteurs de coordonnées (a,b) et (c,d) dans $\mathbb{R}^2$. Calculez la mesure de Lebesgue du parallélogramme dont deux des côtés sont donnés par ces vecteurs.
10. La notion de mesure extérieure μ^*, introduite en cours en termes d'une fonction d'ensemble μ définie sur une algèbre de Boole, peut-être généralisée de la façon suivante : une fonction d'ensemble $m : \mathscr{P}(\mathbb{X}) \to [0,+\infty]$ est une mesure extérieure de Carathéodory si,
    - $m(\emptyset) = 0$,
    - m est isotone,
    - $m(\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} m(A_n)$ pour toute suite (A_n) de $\mathscr{P}(\mathbb{X})$.

    Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et m une mesure extérieure définie sur $\mathscr{P}(\mathbb{X})$. Considérons des sous-ensembles $A_i, i \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{X}$ et notons E l'ensemble des éléments de $\mathbb{X}$ qui appartiennent à une infinité de A_i.
    (a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \bigcup_{i\geq n} A_i$. Supposons que $\sum_{i\in\mathbb{N}} m(A_i) < \infty$. Montrer qu'alors alors $m(E) = 0$.
    (b) Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On considère la série :
$$\sum_n \frac{1}{3^n |x_n - x|}.$$
    Que peut-on dire de l'ensemble des points où cette série converge ? *Indication :* on pourra considérer $A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid |x_i - x| < 2^{-i}\}$ et $m = \lambda_{\mathbb{R}}$.
11. On considère l'application $m : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie, pour tout $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, par :
$$m(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{cases}$$
    Montrez que m est une mesure extérieure. Montrez que les intervalles non vides, différents de $\mathbb{R}$, ne sont pas des ensembles mesurables relativement à m.

2.5 Quelques compléments en théorie de la mesure

1. Soient $\mathscr{X}$ une algèbre de Boole de parties de $\mathbb{X}$ et m une fonction d'ensemble $m : \mathscr{X} \to \mathbb{R}_+$ additive. Démontrer la formule suivante due à Poincaré :

$$m(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) - \sum_{i,j:1\leq i<j\leq n} m(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k:1\leq i<j<k\leq n} m(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-)^{n+1} m(\cap_{i=1}^n A_i).$$

2. On introduit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$, notée $\sim$, définie par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. En utilisant l'axiome de choix [1], construire un ensemble $A \subseteq [0,1]$ qui contient exactement un point dans chaque classe d'équivalence. En supposant que A soit mesurable de mesure de Lebesgue $\lambda(A) = \alpha$, montrer que
   – si $r; q \in \mathbb{Q}$ et $r \neq s$, déterminer $(A+r) \cap (A+s)$ (où $A + x = \{y + x; y \in A\}$) ;
   – montrer que $[0,1] \subseteq \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A+r) \subset [-1,2]$;
   – utiliser la σ-additivité de λ pour établir que $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.
   Conclure par l'absurde que A ne peut pas être mesurable.
3. **[Théorème d'Egorov]** Soit $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\mathbb{X}) < \infty$. On considère la suite des applications f et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f_n \to f$ μ-p.p.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, soient $G_{n,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ et $E_{n,\varepsilon} = \cup_{m\geq n} G_{m,\varepsilon}$. Déterminer $\mu(\cap_n \cup_{m\geq n} G_{m,\varepsilon})$ et en déduire que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0$.
   (b) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon, \delta >$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ et un $B_{\varepsilon,\delta} \in \mathscr{X}$ tels que $\mu(B_{\varepsilon,\delta} \in \mathscr{X}) < \delta$ et que pour tout $x \in B^c_{\varepsilon,\delta}$ et tout $n \geq n_0$ on ait $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
   (c) Soit $\alpha > 0$; pour tout entier $p \geq 1$, on pose $\varepsilon_p = 1/p$, $\delta_p = \alpha/2^p$, $A_p = B_{\varepsilon_p,\delta_p}$, puis $A = \cup_{p\geq 1} A_p$. Montrer que $\mu(A) \leq \alpha$ et que $f_n \to f$ uniformément sur A^c.
4. Supposons que $(\mathscr{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de tribus de $\mathbb{X}$ telle que pour tout n, $\mathscr{X}_n$ soit *strictement* contenue dans $\mathscr{X}_{n+1}$. Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{X}_n$ n'est pas une tribu.
5. Soit C l'ensemble de Cantor dans $[0,1]$. Montrer que

$$C + C := \{c_1 + c_2 : c_1, c_2 \in C\} = [0,2],\ C - C := \{c_1 - c_2 : c_1, c_2 \in C\} = [-1,1].$$

6. **[Théorème d'Ulam]** Soit $\mathbb{X}$ un ensemble de cardinal $\aleph_1$ et $\mathscr{X} = \mathscr{P}(\mathbb{X})$. Si une mesure $\mu : \mathscr{X} \to \mathbb{R}_+$ est nulle sur les singletons de $\mathbb{X}$ alors elle est nulle sur $\mathscr{X}$.

3 Intégrale de Lebesgue

3.1 Fonctions mesurables

Dans les exercices suivants, $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ est un espace mesuré.

1. On suppose que $\mu(\mathbb{X}) = 1$. Soient $A, B \in \mathscr{X}$ tels que $\mu(A) \geq 1/2$, $\mu(B) \geq 2/3$. Montrez que $A \cap B$ est non vide. Si μ est la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0,1]$, que peut-on dire de plus sur $A \cap B$?
2. Soit f une fonction intégrable. On suppose que pour tout $E \in \mathscr{X}$, $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que f est nulle presque partout.

1. Soit A un ensemble non vide. Il existe une application $f : \mathscr{P}(A) \to A$ dite « fonction de choix », telle que pour tout $B \in \mathscr{P}(A)$ non-vide, $f(B) \in B$.

3. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive mesurable. Pour tout entier $K \geq 0$, considérons l'ensemble :
$$E_K = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \geq K\} = f^{-1}([K, +\infty[).$$
   (a) Calculez la mesure de Lebesgue des E_K pour les applications suivantes :
   – $f : [-1,1] \to \mathbb{R}_+$, définie par $f(x) = 3x^2$;
   – $f :]0,1] \to \mathbb{R}_+$, définie par $f(x) = 1/x$;
   – $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}_+$, définie par $f(x) = 1/(x^2+y^2)$;
   (b) Montrez l'inégalité de Markov :
$$\mu(E_K) \leq \frac{1}{K} \int f d\mu.$$
   (c) Qu'en déduit-on si $\int f d\mu < \infty$?
   (d) Donnez un exemple de fonction pour laquelle $\mu(E_K) \not\to 0$.
   (e) Montrez que si il existe un K_0 pour lequel $\mu(E_{K_0}) < +\infty$, alors $\mu(E_K) \to 0$ quand $K \to +\infty$. *Indication :* à quoi est égal $\cap E_K$?
4. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable strictement positive : $\forall x \in \mathbb{X}$, $f(x) > 0$. Montrez que $\int f d\mu > 0$. Soit f, g deux fonctions intégrables telles que $\int f d\mu > \int g d\mu$. Montrez qu'il existe un $x \in \mathbb{X}$ tel que $f(x) > g(x)$. Donnez un exemple d'espace mesuré $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ et de fonctions f, g pour laquelle cette inégalité stricte ne se produit qu'en un seul point.
5. Construire une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que
   – f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
   – $\int f d\lambda < +\infty$,
   – $\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \sup\{f(t),\, t \geq a\} = +\infty$.
6. Soit $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour tout entier n, on définit $f_n = \min(f, n)$. Montrer que pour tout n la fonction f_n est mesurable et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.
7. Soit $(\mathbb{Y}, \mathscr{Y})$ un espace mesurable et $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application mesurable. Pour tout $B \in \mathscr{Y}$, on pose $\nu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$.
   – Montrer que ν est une mesure ; cette mesure est appelée **mesure image** de μ par f.
   – Soit $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si $f \circ \phi$ est μ-intégrable et dans ce cas $\int_{\mathbb{Y}} f d\nu = \int_{\mathbb{X}} f \circ \phi d\mu$.
   – Application : $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$, μ est la mesure de Lebesgue et ϕ l'application « partie entière ». Qui est ν ?
8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{X}$.
   – On suppose que $\int_{\mathbb{X}} f_0 d\mu < +\infty$. Montrer que $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$.
   – Montrer que ce résultat peut être faux si $\int_{\mathbb{X}} f_0 d\mu = +\infty$.
   – Quel résultat retrouve-t-on si l'on choisit $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$ avec $A_n \in \mathscr{X}$ (et $(A_n)_n$ décroissante) ?
9. Soit μ la mesure définie par $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$ pour un $p \in]0,1[$. On définit la suite des fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ par $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})n\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.
   – Pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de la suite $(f_n(x)_n)$.
   – On note g_n la fonction définie par $g_n(x) = (\ln f_{n+1}(x) - ln f_n(x))\mathbb{1}_{[0,n[}(x)$. Monter que $g_n \geq 0$. En déduire que $(f_n)_n$ est une suite croissante.
   – Montrer que la suite $(\int f_n d\mu)_n$ converge vers une limite que l'on déterminera.
10. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{X}$-mesurable. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si elle vérifie le **critère d'intégrabilité** suivant :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{2^n \leq |f| \leq 2^{n+1}\}) < +\infty.$$

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}\mathbb{1}_{\{x>1\}}$. À quelle condition sur α, avons-nous $f_\alpha \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue ?

11. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathscr{X}$-mesurable.
    - Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{|f|\geq n\}} = [|f|]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière.
    - Montrer que si $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.
    - Supposons que la mesure μ est finie. Établir que si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$ alors $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Peut-on se passer de l'hypothèse de finitude de μ ?
12. Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.
    - Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathscr{X}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$, la fonction f soit bornée sur A_ε et $\int_{A_\varepsilon^c} |f| d\mu < \varepsilon$. Indication : on pourra considérer les ensembles $B_n = \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$ et appliquer le théorème de Beppo Levi aux fonctions $|f|\mathbb{1}_{B_n}$.
    - En déduire que
    $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : (A \in \mathscr{X}, \mu(A) \leq \delta) \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

3.2 Quelques compléments en théorie de l'intégration

Dans la suite on se place dans le cas où $-\infty < a < b < \infty$. Toutes les fonctions considérées sont supposées $[a,b] \to \mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue est notée λ.

1. Montrer que toute fonction croissante sur $[a,b]$ est mesurable et bornée (par conséquent intégrable).
2. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante, tout point de discontinuité est de première espèce.
3. Montrer qu'une fonction croissante sur $[a,b]$ a un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuités.
4. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une famille dénombrable de points de $[a,b]$ et $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une famille dénombrable de réels positifs tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n < \infty$. La fonction définie par $S(x) = \sum_{n:x_n<x} h_n$ est appelée *fonction de sauts*. Si en outre $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, la fonction S est appelée *fonction en escalier*.
   (a) Montrer que S est continue à gauche.
   (b) Montrer que tous les points de discontinuité de S sont de première espèce.
   (c) Monter que le saut de S en x_n est h_n.
5. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est croissante et continue à gauche alors elle peut se décomposer comme $f = \phi + \psi$ avec ϕ continue et croissante et ψ une fonction de sauts.
6. Soit $f \in C([a,b])$. On dit qu'un point $x_0 \in [a,b]$ est *invisible du côté droit de* f s'il existe un point ξ avec $x_0 < \xi \leq b$ tel que $f(x_0) < f(\xi)$. (Faire un dessin !) Montrer que si $f \in C([a,b])$, l'ensemble des points invisibles du côté droit de f est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.
7. Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note
$$\begin{aligned} l_g(x_0) &= \liminf_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ L_g(x_0) &= \limsup_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ l_d(x_0) &= \liminf_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ L_d(x_0) &= \limsup_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \end{aligned}$$

Soit $f \in C([a,b])$. Soient c, C, ρ des constantes avec $0 < c < C < \infty$ et $\rho = c/C$; on note $E_\rho = \{x : l_g(x) < c, L_d(x) > C\}$. Montrer que $\lambda(E_\rho \cap]\alpha,\beta[) \leq \rho(\beta-\alpha)$ pour tout intervalle ouvert $]\alpha,\beta[\subseteq [a,b]$.

8. Montrer qu'une fonction monotone sur $[a,b]$ possède presque partout une dérivée finie.
9. Montrer que si $f \in L^1([a,b])$ alors
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy = f(x),$$
pour presque tout $x \in [a,b]$.

4 Espaces L^p

4.1 Normes $\|\cdot\|_p$; inégalités fondamentales

1. Soit $f(x) = x^{-1}(1+|\ln(x)|)^{-2}$. Montrez que :
   - $f \in L^1([1,\infty[)$ et $f \notin L^p([1,\infty[)$ si $p < 1$.
   - $f \in L^1([0,1])$ et $f \notin L^p([0,1])$ si $p > 1$.
   - $f \in L^1([0,\infty[)$ et $f \notin L^p([0,\infty[)$ si $p \neq 1$.
2. Soit $\|x\|$ la norme euclidienne d'un élément de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in]0,\infty]$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $x \mapsto 1/(1+\|x\|^\alpha) \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$?
3. Soit $p \in [1,\infty[$. Sous quelles conditions sur α, β a-t-on $x \mapsto \frac{1}{x^\beta(1+x)^\alpha} \in L^p(\mathbb{R}_+, dx)$? Donnez un exemple d'application dans $L^p(\mathbb{R}, dx)$ mais pas dans $L^q(\mathbb{R}, dx)$, $\forall q \neq p$, ainsi qu'une application dans tous les L^p, $p \in [1,\infty[$, mais pas dans L^∞.
4. Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1,\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\mathbb{X})$ convergente en norme L^p vers une fonction f. Montrez que si f_n converge presque partout vers une fonction g, alors $f = g$ presque partout.
5. Déduire l'inégalité de Hölder de l'inégalité de Jensen.
6. Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\mathbb{X}) = 1$ et f, g deux fonctions positives mesurables sur $\mathbb{X}$. On suppose que $fg \geq 1$. En déduire que $\int f d\mu \int g d\mu \geq 1$.
7. Soient $p, q \in [1,\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+, dx)$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Montrez que $\lim_{x\to\infty} x^{-1/q} G(x) = 0$.
8. Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable.
   - Montrer que $\{p \in]0,\infty[: \|f\|_p < \infty\}$ est un intervalle.
   - Montrer que les applications $p \mapsto \ln \|f\|_{1/p}$ et $p \mapsto \|f\|_p$ sont respectivement convexe et continue sur l'intérieur de leurs intervalles de définition.
   - Montrer que si $f \in L^r(\mathbb{X})$ pour un $r \in]0,\infty[$, alors $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.
9. Soit $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\mathbb{X}) = 1$. Soient $p \in]0,\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{X})$. Montrez que $\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp(\int \ln |f|)$.
10. Soit $X \subset \mathbb{R}^p$ un borélien de mesure de Lebesgue μ égale à un, n un entier positif, $A_i, i = 1, \ldots, n$ des boréliens de X. On se donne c tel que $\forall i,\ \mu(A_i) \geq c$. Montrer qu'il existe $i, j,\ i \neq j$, tels que $\mu(A_i \cap A_j) \geq \frac{nc^2-c}{n-1}$.
11. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que $\lim_{h\to 0} \frac{sup\{|F(x+h)-F(x)|,\ x\in\mathbb{R}\}}{|h|^{1-1/p}} = 0$. Soit g une fonction C^1 intégrable telle que $g' \in L^p$ pour un certain $p \in [1,\infty[$. Montrez que g tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

12. Soient $f, g \in L^1([a,b], dx)$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)G(t)dt = F(b)G(b) - \int_a^b F(t)g(t)dt.$$
13. Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$. Montrer que $\lim_{h \to 0} \int |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure strictement positive. Alors $\{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0. En déduire qu'un sous-groupe borélien de $\mathbb{R}$ différent de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle.
14. Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de période un dont la restriction à $[0,1]$ appartient à $L^p([0,1], dx)$, et $g \in L^q([0,1], dx)$. Montrer que
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(nx)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$
15. Soient $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{X}$ qui converge presque partout vers une fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{X}$ tel que $\mu(\mathbb{X} \setminus E) < \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur E. *Indication :* On pourra s'intéresser aux ensembles $\{|f_i - f| < 1/k\}$ et appliquer le théorème d'Egorov.
16. Soit $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré, $f_n \in L^p(\mathbb{X})$ une suite de fonctions qui converge presque partout vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{X})$. Montrer que si $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, alors $\|f_n - f\|_p \to 0$.
17. Soient M un réel positif, (f_n) avec $f_n \in L^2([0,1], dx)$ une suite de fonctions telles que $\|f_n\|_{L^2} = 1$, $\forall x, |f_n(x)| < M$ et soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrez que si $\sum a_n f_n(x)$ converge presque partout, alors $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.
18. Soit $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ et $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$. On suppose que la suite f_n est équi-intégrable : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall E \in \mathscr{X}$ avec $\mu(E) < \delta$, on a $\forall n$, $\int_E |f_n| \, d\mu < \varepsilon$. Montrer que f est intégrable et que f_n converge en norme L^1 vers f (théorème de Vitali). Montrez que ce résultat implique le théorème de convergence dominée pour les espaces de mesure finie.

4.2 Complétude ; résultats de densité

Notation

On note $(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu)$ un espace mesuré arbitraire ; lorsque $\mathbb{X}$ est un espace métrique (ex. $\mathbb{R}^n$), la tribu correspondante sera la tribu borélienne. On note $\mathbb{B}$ un espace de Banach arbitraire, toujours considéré comme mesurable (muni de sa tribu borélienne) et on note $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ sa norme.

Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note
$$\mathscr{L}^p(\mathbb{X}, \mathscr{X}, \mu; \mathbb{B}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{B} \mid f - \text{mesurable et } \|f\|_p < +\infty\},$$
où
$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{X}} \|f(x)\|_{\mathbb{B}} \mu(\mathrm{d}x)\right)^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$
et
$$\|f\|_\infty = \inf\{a \in \overline{\mathbb{R}} : \mu(\{x \in \mathbb{X} : \|f(x)\|_{\mathbb{B}} > a\}) = 0\}.$$

Pour des mesures μ qui ne sont que σ-finies, les espaces de fonctions localement intégrables sont intéressants. On note (en omettant $(\mathbb{X},\mathscr{X},\mu;\mathbb{B})$ pour alléger l'écriture)

$$\mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}} = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{B} \mid f-\text{mesurable t.q. pour tout compact } K, f\restriction_K \in \mathscr{L}^p\}$$

et $L^p_{\mathrm{loc}} = \mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}}/\mathscr{R}_\mu$.

1. Montrer le théorème de **Riesz-Fischer** : Pour tout $p \in [1,+\infty]$, l'espace $L^p(\mathbb{X},\mathscr{X},\mu;\mathbb{B})$ est un espace de Banach.
2. Soient p,q avec $1 \le p \le q \le +\infty$. Montrer que :
   (a) Si $\mu(\mathbb{X}) < +\infty$ alors
   $$\mathscr{L}^\infty \subseteq \mathscr{L}^q \subseteq \mathscr{L}^p \subseteq \mathscr{L}^1.$$
   Les mêmes relations d'inclusion restent valables pour les espaces L^p.
   (b) Si μ est σ-finie alors
   $$\mathscr{L}^\infty_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathscr{L}^q_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathscr{L}^p_{\mathrm{loc}} \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}$$
   et les mêmes relations restent valables pour les espaces L^p_{loc}.
3. On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{B}$ est **étagée** (par rapport à $\mathscr{X}$) si elle peut s'écrire comme $f = \sum_{i\in I} f_i \mathbb{1}_{A_i}$, où I est fini, $f_i \in \mathbb{B}$ pour tout $i \in I$ et la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition finie $\mathscr{X}$-mesurable de $\mathbb{X}$. On note
   $$\mathscr{E}(\mathbb{X},\mathscr{X};\mathbb{B}) = \{f : \mathbb{X} \to \mathbb{B} \mid f \text{ est } \mathscr{X}-\text{étagée}\}$$
   la classe de fonctions étagées et
   $$\mathscr{E}^1(\mathbb{X},\mathscr{X};\mathbb{B}) = \{f \in \mathscr{E}(\mathbb{X},\mathscr{X};\mathbb{B}) \mid \|f\|_1 < +\infty\}$$
   la classe de fonctions étagées intégrables.
   Montrer que pour tout $p \in [1,+\infty[$, $f \in \mathscr{E}^1$ si, et seulement si,$f \in (\mathscr{E} \cap \mathscr{L}^p)$.
4. Montrer que pour tout $p \in [1,+\infty[$, $\mathscr{E}^1$ est dense dans $\mathscr{L}^p$ et $\mathscr{E}^1/\mathscr{R}_\mu$ est dense dans L^p.
5. Dans la suite, on se limite au cas $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathscr{X} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu borélienne et μ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle et $\mathbb{B} = \mathbb{R}$. (L'espace $\mathbb{R}^n$ est métrisée par la distance euclidienne.)
   $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \equiv C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ est l'espace de fonction réelles continues, $C^m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ l'espace de fonctions m fois continûment dérivables et $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ l'espace de fonctions indéfiniment dérivables. On note
   $$C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\| < +\infty\},$$
   $$C_0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \mid \lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0\}$$
   et $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ qui s'annullent à l'extérieur d'un compact.
   Pour $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ on note C^m_b, C^m_0 et C^m_c les espaces correspondants pour des fonctions m fois continûment dérivables.
   Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a les inclusions $C^m_c \subseteq C^m_0 \subseteq C^m_b$. L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, $C^\infty_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, est parfois aussi noté $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.
6. L'espace C_c est dense dans L^p pour tout $p \in [1,+\infty[$. (En d'autre termes, le complété de C_c par rapport à la norme $\|\cdot\|_p, p \in [1,\infty[$ est L^p. Noter que son complété par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ *n'est pas* L^∞ mais C_0.)

7. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite **à décroissance rapide** si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on $\lim_{|x|\to+\infty} |x^p f(x)| = 0$.
   On appelle **espace de Schwartz**, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, l'ensemble de fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que f ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.
   Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a les inclusions
   $$C_c^\infty(\mathbb{R}) \equiv \mathscr{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$$
   et $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. (*A fortiori* l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, \infty[$.)

4.3 Dualité

1. Soit $C_c^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur $\mathbb{R}$
   (a) Montrer que si A est un intervalle ouvert, alors $\mathbb{1}_A$ est limite simple de fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R})$, majorées par 1.
   (b) En déduire que $\sigma(C_c^\infty(\mathbb{R})) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
   (c) Conclure qu'une mesure μ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est caractérisée par la donnée de $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$ pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
2. On considère l'espace mesuré $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$ et les espaces fonctionnels L^1 et L^∞. Nous avons montré en cours que $L^\infty \subset (L^1)^*$, cette inclusion étant stricte. En fait, nous avons les inclusions strictes :
   $$C([0,1]) \subset L^\infty \subset (L^1)^*.$$
   (a) Montrer que la masse de Dirac $\delta_0 \in C([0,1])^*$ en associant par dualité la forme linéaire $\Lambda(f) = \langle \delta_0 \,|\, f \rangle = \int_{[0,1]} f(x)\lambda(dx)$.
   (b) Déterminer la norme de Λ.
   (c) Par le théorème de Hahn-Banach, montrer que l'on peut prolonger $\tilde{\Lambda}$ sur L^∞.
   (d) Montrer que la forme $\tilde{\Lambda}$ n'est pas dans $(L^1)^*$.

5 Bibliographie

Les références de base sont indiquées en **caractères gras**.

H. Bauer, Probability theory and elements of measure theory, Academic Press, New York (1978).

V.I. Bogachev, Measure theory, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (2007).

M. Briane, G. Pagès, Théorie de l'intégration, Vuibert, Paris (1998).

J. Eltrod, Maß- und Integrationstheorie, Springer-Verlag, 5. korrigierte Auflage, Berlin (2006).

J. Gapaillard, Intégration pour la licence, Dunod, Paris (2002).