

Théorie de la mesure et intégration de Lebesgue

Motivations et contexte historique

Dimitri Petritis

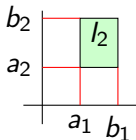
Institut de recherche mathématique
Université de Rennes 1

<http://perso.univ-rennes1.fr/dimitri.petritis>

8 septembre 2010

Mesure de figures canoniques

- Si $I_1 = [a_1, b_1]$, avec $-\infty < a_1 \leq b_1 < \infty$, alors $\lambda_1(I_1) = b_1 - a_1$.



- Si a_2 alors $\lambda_2(I_2) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$.

- Plus généralement, si $I_d = \times_{i=1}^d [a_i, b_i]$ avec $a_i \geq b_i$ pour tout i (parallélépipède canonique), alors $\lambda_d(I_d) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$.

Remarquer que

- les points ont une longueur nulle, car $\lambda_1(\{a_1\}) = 0$ et
- les segments (canoniques) de droite ont une aire nulle car $\lambda_2(\{a_1\} \times [a_2, b_2]) = 0$.

Conséquence :

$$\lambda_1([a, b]) = \lambda_1(]a, b]) = \lambda_1(]a, b]) = \lambda_1([a, b]) = 0.$$

Mesure de figures élémentaires

Figure élémentaire J = réunion finie de parallélépipèdes canoniques disjoints $(J_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^d$.

- Additivité disjointe :

$$J = \sqcup_{i=1}^n J_i \Rightarrow \lambda_d(J) = \sum_{i=1}^n \lambda_d(J_i).$$

- Invariance aux translations :

$$\lambda_d(J) = \lambda_d(J + x), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

- Invariance aux inversions :

$$\lambda_d(-J) = \lambda_d(J).$$

Mesure de figures plus compliquées

- Utiliser les règles précédentes pour se ramener à des figures élémentaires.
- Exemple :

$$\lambda_2(\triangle) = \frac{1}{2}\lambda_2(\text{rectangle}) = \frac{1}{2}\lambda_2(\text{rectangle}) = \frac{1}{2}\lambda_2(\text{rectangle})$$

Le problème de la mesure

- Pour des figures encore plus compliquées, la règle d'additivité doit être étendue en **additivité dénombrable** disjointe (ou σ -additivité) :

$$J = \sqcup_{i=1}^{\infty} J_i \Rightarrow \lambda_d(J) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_d(J_i).$$

- **Idée** : approcher une figure arbitraire par de réunions dénombrables de figures plus simples dont on sait calculer le volume.

Des questions lancinantes

Le problème de la mesure : Existe-t-il une application non-triviale $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ t.q.

- $m(\emptyset) = 0$,
- $m(\sqcup_{n \in \mathbb{N}} J_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(J_n)$, où $J_n \subseteq \mathbb{R}^d$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- invariante aux translations et
- vérifiant $m([0, 1]^d) = 1$?

Le papyrus de Rhind

... ou la quadrature du cercle selon Ahmès

En 1858, Henry Rhind achète à Louxor un papyrus de $5\text{m} \times 32\text{cm}$, découvert à Thèbes sur lequel le scribe **Ahmès** (-1680 – -1620) consigne 87 problèmes résolus d'arithmétique, de géométrie et d'arpentage. Ahmès indique que ces résultats remontent au Moyen Empire (-2000).

Problèmes 48 et 50 particulièrement intéressants :

$D(d)$: disque de diamètre d , $C(c)$: carré de coté c , Ahmès prétend que

$$\lambda_2(D(9d)) = \lambda_2(C(8d)),$$

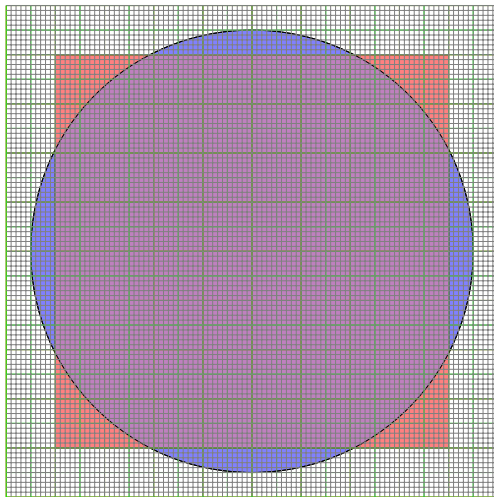
et conclut que

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}.$$

En effet, si on admet la première relation,

$$\pi \frac{(9d)^2}{4} = (8d)^2 \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \simeq 3,160.$$

Quelle est la méthode utilisée par Ahmès ?



118 rouges ; 120 bleus.

Quadrature de la parabole selon Archimède

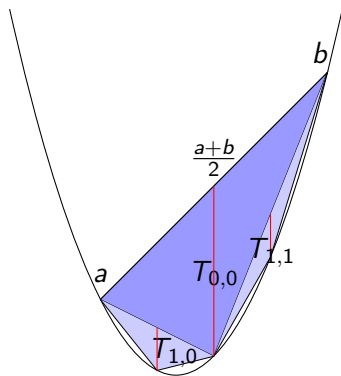
Archimède de Syracuse (-287 – -212)

- perfectionne la *méthode d'exhaustion* introduite par Eudoxe de Cnide,
- utilise un double raisonnement par l'absurde,
- introduit un axiome (aujourd'hui connu sous le nom de « propriété archimédienne du corps de réels »),

pour calculer l'aire de figures non-triviales comme une calotte arbitraire d'une parabole. Il **démontre** que l'aire de la calotte parabolique p vérifie :

$$p := \lambda_2 \left(\text{calotte}(a, b) \right) = \frac{4}{3} \lambda_2 \left(\text{triangle}(a, \frac{a+b}{2}, b) \right).$$

La méthode



$$\lambda_2(T_{1,0}) = \lambda_2(T_{1,1}) = \lambda_2(T_{0,0})/8.$$

Plus généralement,

$$\lambda_2(T_{k+1,n}) = \lambda_2(T_{0,0})/8^{k+1}, k \in \mathbb{N}, n = 0, \dots, 2^{k+1} - 1.$$

Fin de la démonstration

Notons $t = \lambda_2(T_{0,0})$. On aura pour tout $k \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{2^k-1} \lambda_2(T_{k,n}) = \frac{t}{4^k},$$

par conséquent

$$p = t\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) = \frac{4}{3}t.$$

Un sous-produit de la démonstration

... et un encadrement de π

- Première sommation d'une série infinie de l'histoire, en se servant d'une construction géométrique pour la détermination ($4/3$) de la limite.
- Par méthode d'exhaustion pour des polygones inscrits et circonscrits



hexagone



dodecagone



24-gone



48-gone



96-gone

$$3.141 \simeq 3 + \frac{10}{71} \leq \pi \leq 3 + \frac{10}{70} \simeq 3.142.$$

Histoire du manuscrit d'Archimède sur la méthode

- Palimpseste découvert en 1906 par Johan Ludvig Heiberg qui le déchiffre à la loupe et qui disparaît de nouveau pour réapparaître en 1998 dans une vente aux enchères ; acquis par le Walter Arts Museum de Baltimore.
- En train d'être **re-déchiffré** à l'aide des technologies modernes par une équipe pluridisciplinaire d'historiens des sciences, archéologues, physiciens et mathématiciens.

Digression historique

Sur les systèmes de numération

- Les grecs ne disposaient pas de système efficace de représentation de nombres.
- Ce sont les indiens qui, vers 500, découvrent l'écriture positionnelle décimale ;
- **Brahmagupta** (598 – 668) dans son livre *Brahmasphutasiddhanta* de 628 la complète et fait **pour la première fois** référence au 0 ;
- **Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi** (790 – 850) traduit en 825, lors de son séjour à Bagdad, le livre de Brahmagupta en arabe ;
- Version qui passe en Espagne et est traduite en latin *Algoritmi de numero Indorum* ;
- qui est ensuite popularisée par **Leonardo Pisano Bigollo**, dit Fibonacci (1170 – 1250) ;
- qui ne commence à être largement répandue en occident qu'après 1585.

Digression historique

Sur les notions d'infini, de limite, de réels

- Sans les notions de l'infini, de la limite, des réels.
- Pour cela, il faut attendre **Sir Isaac Newton** (1643 – 1727) et **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646 – 1716).

Aire et intégrale

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) clarifie la notion d'intégrale qui porte son nom, donne sa construction et relie l'intégrale d'une fonction avec l'aire sous son graphe. La construction qu'il donne est encore utilisée pour l'approximation numérique des intégrales.

Peano, Jordan, Borel : fondements de la mesure

Les précurseurs de la nouvelle intégrale

Giuseppe Peano (1858 – 1932) donne une définition de mesurabilité sur laquelle se base **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838 – 1922) pour en donner une meilleure :

Définition (Jordan, 1892) : Soit E un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$. Alors E est $\mathcal{J}$ -mesurable si l'étendue intérieure et l'étendue extérieure sont égales.

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 – 1956) améliore encore la notion de mesurabilité. Cette notion sera vue ultérieurement dans le cours.

Lebesgue

Le mot de la fin ?

Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) dans son livre *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de 1904 lie la théorie de la mesure avec la théorie de l'intégrale.
L'objet principal de ce cours.