UNE DESCRIPTION DE LA COHOMOLOGIE DU COMPLÉMENT À UN DIVISEUR NON RÉDUCTIBLE DE $\mathbb{P}^2$

par David Lubicz

Résumé. — Dans cet article, nous étudions la topologie du plongement d'une courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ en donnant des bases effectives pour la cohomologie à coefficient complexe de l'espace complémentaire. Nous obtenons en particulier une majoration de l'ordre des poles d'une telle base qui est meilleure que celle décrite dans les travaux fondamentaux de P. Griffiths. Nous traitons quelques exemples qui illustrent certains résultats de comparaison entre la filtration par l'ordre du pôle et la filtration de Hodge de la cohomologie à coefficient complexe.

Abstract. — In this paper, we study the topology of the complement of an algebraic curve in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ by giving an explicit basis for the cohomology with complex coefficients. In particular, we obtain a upper bound for the pole order of such a basis which is better than the one describe in the works of P. Griffiths. We provide some examples in order to illustrate some results of comparison between the pole filtration and the Hodge filtration of the cohomology with complex coefficients.

1. Introduction

L'objet de cet article est l'étude du plongement d'une courbe algébrique dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par une description de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}$ de l'espace complémentaire.

David Lubicz, Celar-BP 7419-35174 Bruz Cedex • *E-mail :* `david.lubicz@univ-rennes1.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 14D05, 32S20, 32S60.

Mots clefs. — Théorie globale des Singularités, Filtration par l'ordre du pôle, Filtration de Hodge, Théorie de Hodge mixte.

Dans [**7**], P. Griffiths définit une filtration par l'ordre du pôle P, sur le complexe de de Rham algébrique du complément à un diviseur D lisse de $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif complexe. Il montre que toute classe de cohomologie peut être représentée par une forme dont le pôle est d'ordre au plus n le long de D. De plus, il exhibe une base du groupe de cohomologie de degré n.

La majoration de l'ordre du pôle a été généralisée dans [**3**] au complément à une hypersurface de $\mathbb{P}^n$ non nécéssairement lisse.

Nous nous proposons dans cet article d'améliorer la majoration de l'ordre du pôle pour des diviseurs réductibles de $\mathbb{P}^2$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1. — Soient $C_1, \ldots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes

$$\frac{P\Omega}{f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}}, \quad 1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n,$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler. Sauf mention du contraire, les groupes de cohomologie sont toujours à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Si l'on pose $U = \mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^n C_i$, alors U est une variété affine, donc d'après [**10**], U a le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2. Donc $b_k(U) = 0$, pour tout $k > 2$, $b_k(U)$ étant le k-ième nombre de Betti de U.

Comme U est connexe, $b_0(U) = 1$ et nous savons, d'aprés [**4**] que $b_1(U) = b^0_{2n-2}(C) = n(C) - 1$ où $n(C)$ est le nombre de composantes irréductibles de la courbe C. Si l'on décompose g en ses facteurs irréductibles $g = g_1 \ldots g_k$, il est facile de voir que les formes :

$$\omega_i = (dg_i)/g_i - (n_i/n)(dg/g)$$

où $n_i = \deg g_i$ et $n = d$, engendrent $H^1(U)$ et ont pour unique relation : $\sum \omega_i = 0$. Le reste de cet article est donc dévolu a l'étude de $H^2(U)$.

2. Cas de deux courbes

Nous commencons par étudier le cas de deux courbes : C_1 et C_2. Si l'on note $U_1 = \mathbb{P}^2 - C_1$ et $U_2 = \mathbb{P}^2 - C_2$ on peut écrire la suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} \to \quad & H^2(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{\alpha} \quad H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \to H^2(U_1 \cap U_2) \\ \xrightarrow{\delta} \quad & H^3(U_1 \cup U_2) \to \quad 0 \end{aligned}$$

En effet, comme U_1 et U_2 sont des surfaces affines complexes, d'après [**10**], U_1 et U_2 ont le type topologique d'un CW-complexe de dimension 2 et donc $H^3(U_1) = H^3(U_2) = 0$. Si l'on pose $A = \mathbb{P}^2 \backslash (U_1 \cup U_2)$, A est fini donc la suite exacte :

$$H_2(A) = 0 \to H_2(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C} \to H_2(\mathbb{P}^2, A) \to \tag{1}$$

$$\to H_1(A) = 0 \tag{2}$$

donne $H^2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}$ par la dualité d'Alexander. Pour finir, on écrit :

$$H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \to H^1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta'} H^2(U_1 \cup U_2) \to \tag{3}$$

avec $H^2(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}$ et
– $b_1(U_1) = n(C_1) - 1$,
– $b_1(U_2) = n(C_2) - 1$,
– $b_1(U_1 \cap U_2) = n(C_1) + n(C_2) - 1$.
où $n(C_i)$ désigne le nombre de composantes irréductibles de la courbe C_i et donc δ' est un épimorphisme. Le fait que δ' soit un épimorphisme implique que $\alpha = 0$.

Les résultats de [**7**] dans le cas lisse et [**3**] s'appliquent à $H^2(U_1)$ et $H^2(U_2)$. Pour décrire $H^2(U_1 \cap U_2)$, il suffit donc de trouver une caractérisation de $H^3(U_1 \cup U_2)$.

3. Cas de deux courbes

On a la suite exacte suivante :

$$H^3(\mathbb{P}^2) \to H^3(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \to H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \xrightarrow{\psi} H^4(\mathbb{P}^2)$$

où $H^3(\mathbb{P}^2) = 0$, $H^4(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cap C_2)) \simeq \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ par la dualité d'Alexander, $H^4(\mathbb{P}^2) \simeq \mathbb{C}$ et ψ est donnée par :

$$\psi((\alpha_1, \ldots, \alpha_{|C_1 \cap C_2|}) = \sum \alpha_i$$

On peut donc voir $H^3(U_1 \cup U_2)$ comme le sous-espace de $\mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|}$ donné par $ker\psi$.

Le morphisme de connection δ de la suite de Mayer-Vietoris peut alors s'écrire :

$$\begin{array}{rll} \delta : & H^2(U_1 \cap U_2) & \rightarrow \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|} \supset H^3(U_1 \cup U_2) \\ & \omega & \mapsto (\mathrm{Res}_{p_i}\omega)_{p_i \in C_1 \cap C_2} \end{array}$$

D'après le théorème des résidus [**5**] pp.656, $\sum_{p_i \in C_1 \cap C_2} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = 0$, donc l'image de δ est bien contenue dans $H^3(U_1 \cup U_2)$.

Dans tout ce chapitre $\mathbb{C}_d[X_1, \ldots, X_n]$ designera l'espace des polynômes homogènes de degré d en les variables $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients complexes.

Nous pouvons définir une application :

$$\begin{array}{rll} \phi : & \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] & \rightarrow H^3(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1} \\ & P & \rightarrow \left(\mathrm{Res}_{p_i} \dfrac{P\Omega}{f_1 f_2} \right)_{p_i \in C_1 \cap C_2} \end{array}$$

où Ω est la contraction de la forme volume de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ par le champ de vecteurs d'Euler. De manière plus explicite, si (X, Y, Z) est un système de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}^3$ alors :

$$\Omega = XdY \wedge dZ - YdX \wedge dZ + ZdX \wedge dY$$

Théorème 2. — L'application ϕ est surjective.

Nous proposons deux démonstrations de ce théorème. Une démonstration élémentaire et une démonstration avec la théorie de Hodge. On peut trouver une version plus générale de ce résultat dans [**8**] pp.373 (valable pour n diviseurs positifs sur une variété de dimension n).

Démonstration. — (élémentaire) La démonstration se fait en deux étapes. On considère tout d'abord le cas où les courbes ont une intersection transverse. Dans ce cas, nous pouvons calculer simplement le noyau de ϕ :

$$\begin{aligned} ker\phi &= \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad \mathrm{Res}_{p_i} h = 0 \quad p_i \in C_1 \cap C_2\} \\ &= \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]/ \quad h \in (f,g)_x \quad \forall x \in \mathbb{P}^2\} \end{aligned}$$

où $(f,g)_x$ désigne l'idéal engendré par f et g dans l'anneau local en x. Donc d'apres le théorème de Max Noether [**5**] pp.703, le noyau de ϕ est l'intersection de l'idéal de $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ engendré par (f,g) avec $\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]$, que nous noterons $(f,g)_{d_1+d_2-3}$.

$\phi : \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z] \rightarrow H^3(U_1 \cup U_2) = \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1}$ se factorise donc par une application injective

$$\hat{\phi} : \frac{\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]}{(f,g)_{d_1+d_2-3}} \rightarrow \mathbb{C}^{|C_1 \cap C_2|-1}$$

Pour montrer que ϕ est surjective, il suffit de montrer que

$$\dim \frac{\mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X,Y,Z]}{(f,g)_{d_1+d_2-3}} = d_1 d_2 - 1.$$

Comme (f,g) définit une intersection complète de $\mathbb{P}^2$, [**?**] pp.109 nous donne le polynôme de Hilbert associé à une telle intersection. On peut donc vérifier le résultat en calculant le $(d_1 + d_2 - 3^{ieme})$ coefficient du développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle :

$$P(t) = \frac{(t^{d_1} - 1)(t^{d_2} - 1)}{(1-t)^3}$$

Soit maintenant $\mathcal{A}$ l'espace des courbes dont l'intersection en un point de $\mathbb{P}^2$ n'est pas transverse :

$$\mathcal{A} = \{(f,g,x) \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z] \times \mathbb{P}^2 / \mu_x(C_f, C_g) > 1\}$$

où $\mu_x(C_f, C_g)$ est la multiplicité d'intersection des courbes C_f et C_g muni d'une projection p_1 sur $\mathbb{C}_d \times \mathbb{C}_{d'}$ et p_2 sur $\mathbb{P}^2$. Toutes les fibres de p_2 ont la même dimension. En dehors d'un fermé de Zariski, d'après le théorème de Bezout, p_1 a une fibre finie. Donc $\mathcal{A}$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z] \times \mathbb{P}^2$ de dimension $\begin{pmatrix} d + d' + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc comme $\mathbb{P}^2$ est une variété complète, $p_1(\mathcal{A})$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z]$.

Soient $(f,g) \in \mathcal{A}$ deux polynômes de degrés respectifs d_1 et d_2. Les courbes associées ont pour intersection les points $p_1, \ldots, p_n$ d'ordres $o_1, \ldots, o_n$. D'après le théorème de Bezout, on a $\sum o_i = d_1 d_2$. Comme $p_1(\mathcal{A})$ est une sous-variété de $\mathbb{C}_d[X,Y,Z] \times \mathbb{C}_{d'}[X,Y,Z]$, il existe une déformation (f_t, g_t) de (f,g) avec des courbes lisses transverses pour $t \neq 0$.

Pour $\eta > 0$ petit, $\exists \epsilon > 0$ tel que la boule de centre $p_i, \quad i = 1 \ldots n$ de rayon η contienne exactement o_i points de $C_{f_t} \cap C_{g_t}, \quad 0 < t < \epsilon$, que l'on notera $p_{ti}^j, \quad i = 1 \ldots n, \quad j = 1 \ldots o_i$.

On se donne maintenant une norme quelconque sur l'espace des polynômes de degré $d_1 + d_2 - 2$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ et pour $0 < t < \epsilon$, soit V_t^i l'espace des polynômes P_t de degré $d_1 + d_2 - 2$ qui vérifient :

$$\sum_{j=1}^{o_i} \mathrm{Res}_{p_{ti}^j} \frac{P_t \Omega}{f_t g_t} = \alpha_i \quad i = 1 \ldots n$$

Pour chaque t soit P_t^0 le polynôme de $\cap V_t^i$ de norme minimale.

Supposons que $\lim_{t \to 0} ||P_t^0|| = +\infty$. Cela veut dire que pour un $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\lim_{t \to 0} d(0, V_t^{i_0}) = +\infty$.

Si $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$, ou bien $\sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = 0$, ou bien il existe $\lambda_t \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_t \sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = \alpha_{i_0}$ et d'après ce qui précède, $\lim_{t \to 0} |\lambda_t| = +\infty$. Dans les deux cas, on obtient : $\lim_{t \to 0} \sum_{j=1}^{o_{i_0}} \mathrm{Res}_{p_{ti_0}^j} \frac{P\Omega}{f_t g_t} = 0$ donc d'après le principe de continuité des résidus [**5**] pp.657, pour tout $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$, $\mathrm{Res}_{p_{i_0}} \frac{P\Omega}{fg} = 0$, ce qui est une contradiction.

Donc il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-2}[X,Y,Z]$ tel que $P = \lim P_n$ où les P_n vérifient $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Res}_{p_i} \frac{P_n \Omega}{fg} = \alpha_i$. Le principe de continuité des résidus permet de conclure. $\square$

La deuxième démonstration de ce théorème utilise la théorie de Hodge. Rappelons brièvement comment on peut définir la filtration de Hodge sur la cohomologie de $U = \mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)$ et plus généralement sur la cohomologie de toute variété algébrique d'après [**2**]. Nous savons qu'il existe un morphisme birationnel $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ avec X une variété projective $D = \pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ un diviseur à croisements normaux de X. Le morphisme π induit un isomorphisme $X \backslash D \simeq U$. Soit j

l'inclusion de U dans X. On a

$$H^*(U) = \mathbb{H}^*(X, \mathrm{Rj_*\mathbb{C}_U}) = \mathbb{H}^*(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}}(\mathrm{logD}))$$

où $\Omega^*_X(\log D))$ désigne le complexe logarithmique. Rappelons que l'on définit $\Omega^1_X(\mathrm{logD}))$ comme le sous-$\mathcal{O}$-module localement libre de $j_*\Omega^*_X$ engendré par Ω^*_X et les $\frac{dz_i}{z_i}$ où z_i est une équation locale d'une composante irréductible locale de D, et :

$$\Omega^2_X(\mathrm{logD})) = \bigwedge^2 \Omega^1_{\mathrm{X}}(\mathrm{logD}))$$

La filtration de Hodge sur $H^*(U)$ est la filtration induite par la filtration bête $(\sigma_\geq)$ sur le complexe logarithmique :

$$F^pH^k(U) = \quad \text{l'image de} \quad \mathbb{H}^k(X, \sigma_{\geq p}\Omega^*_X(\log D)) \quad \text{dans} \quad H^k(U)$$

Rappelons que si K^* est un complexe dans une catégorie abélienne, alors la filtration bête $\sigma_{\geq p}K$ est par définition le sous-complexe de K^* : $(\sigma_{\geq p}K)^i = K^i$ si $i \geq p$ et 0 si $i < p$.

La première suite spectrale d'hypercohomologie du complexe de faisceaux $\Omega^*_X(\log D)$ coïncide avec la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré $(\Omega^*_X(\log D), \sigma_\geq)$:

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^*(\log D))$$

Cette suite spectrale dégénère en E_1 d'après [**2**]. En particulier :

$$F^2H^2(U) \simeq \Gamma(X, \Omega^2(\log D))$$

La démonstration du théorème 2 utilise le point 2 du lemme suivant :

Lemme 1. — 1. $F^1(H^2(U_1 \cap U_2)) = H^2(U_1 \cap U_2)$
2. $F^2(H^3(U_1 \cup U_2)) = H^3(U_1 \cup U_2)$

Démonstration. — 1. D'après [**2**] pp. 39, il suffit de montrer que $h^{0,2}(H^2(U_1 \cap U_2)) = 0$. Le résultat de [**6**] montre que les nombres de Hodge se comportent bien pour la dualité d'Alexander :

$$h^{0,2}(H^2(U_1 \cap U_2)) = h^{2,0}(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2)$$

La suite exacte longue :

$$\to H^1(C_1 \cup C_2) \to H^2(\mathbb{P}^2, C_1 \cup C_2) \to H^2(\mathbb{P}^2)$$

où $H^2(\mathbb{P}^2)$ est de type (1,1) et $h^{2,0}(H^1(C_1 \cup C_2)) = 0$ ce qui permet de conclure.

2. En utilisant la première partie et [**2**] pp. 39, il suffit de montrer que $h^{1,2}(H^3(U_1 \cap U_2)) = 0$. On procède de la même manière que dans la démonstration précédente.

□

Preuve du théorème 4.. — D'après le lemme, nous avons la suite exacte :

$$F^2(H^2(U_1)) \oplus F^2(H^2(U_2)) \xrightarrow{\rho} F^2(H^2(U_1 \cap U_2)) \xrightarrow{\delta} H^3(U_1 \cup U_2) \to 0 \tag{4}$$

Cela veut dire que, pour n'importe quelle classe de cohomologie α de $H^3(U_1 \cup U_2)$, on peut trouver une forme différentielle ω telle que $\delta(\omega) = \alpha$ et où $\pi^*(\omega)$ est une forme du complexe logarithmique de degré 2. En particulier, $\pi^*(\omega)$ a des pôles simples le long de $\pi^{-1}(C_1 \cup C_2)$ donc ω a des pôles simples le long de $C_1 \cup C_2$ car π est un isomorphisme en dehors d'un ensemble de codimension 2 (étant une composition d'éclatements de points). □

Corollaire 1. — Si l'on pose $U = U_1 \cap U_2$, nous avons :

1. $\dim Gr^1_F H^2(U) = \dim Gr^1_F H^2(U_1) + \dim Gr^1_F H^2(U_2)$,
2. $\dim Gr^2_F H^2(U) = dim Gr^2_F H^2(U_1) + dim Gr^2_F H^2(U_2) + |C_1 \cap C_2| - 1$.

Démonstration. — Nous avons les suites exactes suivantes :

$$0 \to F^1(H^2(U_1) \oplus F^1(H^2(U_1)) \to F^1H^2(U) \to F^1H^3(U_1 \cup U_1) \tag{5}$$

$$0 \to F^2H^2(U_1) \oplus F^2H^2(U_1) \to F^2H^2(U) \to F^2H^3(U_1 \cup H_2) \tag{6}$$

La première partie du corollaire découle immédiatement des deux suites exactes précédentes et de l'égalité :

$$F^1H^3(U_1 \cup U_1) = F^2H^3(U_1 \cup H_2).$$

La deuxième partie provient de la deuxième suite exacte et du fait que $dim H^3(U_1 \cup U_2) = |C_1 \cap C_2| - 1$. □

4. Cas de n courbes

Théorème 3. — Soient $C_1, \ldots, C_n$ n courbes de $\mathbb{P}^2$ définies par les équations irréductibles $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$. Alors $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^n C_i)$ est engendré par les formes $\frac{P\Omega}{f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3}}$, $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq n$.

Démonstration. — Nous allons faire une preuve par récurrence. Le théorème est vrai pour

1. $k = 2$ d'après le théorème 1.
2. $k = 3$ en appliquant le théorème 1 aux courbes d'équations $(f_1 f_2, f_3)$.

Pour poursuivre la démonstration nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 1. — Soient $P_1, \ldots, P_n$ les points d'intersection des courbes $C_1, \ldots, C_\nu$ et soient $R_1, \ldots, R_n$ tels que $\sum R_i = 0$ alors il existe une forme fermée ω engendrée par les $\frac{P\Omega}{f_i f_j f_k}$ telle que $\mathrm{Res}_{p_i} \omega = R_i$.

Démonstration. — On considère le graphe dont les sommets sont les points $P_1, \ldots, P_n$. Deux points sont reliés par une arête s' ils sont sur une même courbe.

Soient les points (P_i, λ_i) munis de poids tels que $\sum \lambda_i = 0$. Si P_k et P_l sont sur une même arête, on considère les transformations :

$$\tau_{kl}((P_k, \lambda_k), \lambda) = (P_k, \lambda_k + \lambda),$$
$$\tau_{kl}((P_l, \lambda_l), \lambda) = (P_l, \lambda_l - \lambda),$$
$$\tau_{kl}((P_m, \lambda_m), \lambda) = (P_m, \lambda_m) \quad m \neq k, l.$$

□

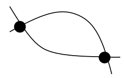
On a le lemme :

Lemme 2. — Il existe une suite finie $(k_i, l_i, \lambda_i) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{C}, i \in \{1 \ldots p\}$, telle que $\forall i \in \{1 \ldots p\}$, P_{k_i} et P_{l_i} soient sur une même arête et

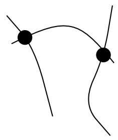
$$\circ \tau_{k_i l_i}(\lambda_i)((P_1, 0), \ldots, (P_N, 0)) = ((P_1, R_1), \ldots, (P_N, R_N))$$

Considérons l'application ϕ qui a une forme $\omega = \frac{P\Omega}{f_i f_j f_k}$ fait correspondre $((P_1, \mathrm{Res}_{p_i}\omega), \ldots, (P_N, \mathrm{Res}_{p_N}\omega$ alors pour tout triplet (k_i, l_i, λ_i) permis, il existe une forme ω_0 telle que $\phi(\omega + \omega_0) = \tau_{k_i, l_i}(\lambda)(\phi(\omega))$.

Démonstration. — Deux cas :



1. Si P_k et P_l sont traversés par deux courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'}}$ en utilisant le théorème avec $k = 2$.



2. Si P_k et P_l sont traversés par trois courbes alors ω_0 est de la forme $\frac{P\Omega}{f_\tau f_{\tau'} f_{\tau''}}$ en utilisant le théorème avec $k = 3$.

Cela permet de conclure. □

fin de la démonstration. On a la suite exacte :

$$H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_{k+1}) \oplus H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^k C_i) \to H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^{k+1}) \to^\delta H^3(\mathbb{P}^2 \backslash C_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^k C_i)) \to 0$$

Soient $P_1, \ldots, P_n$ les points d'intersection de $C_{k+1} \cap (\cup_{i=1}^k C_i)$. Le morphisme δ s'écrit :

$$\begin{array}{llll} \delta : & H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \cup_{i=1}^{k+1} C_i) & \to \mathbb{C}^{N-1} \\ & \omega \to (Res_{p_1}\omega, \ldots, Res_{p_N}\omega) & \end{array}$$

l'hypothèse de récurrence et le théorème permettent de conclure. □

La théorie de Hodge donne des informations supplémentaires que nous allons utiliser dans les exemples qui suivent.

On considère l'application :

$$\begin{array}{lll} j : & \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] & \to H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)) \\ & h & \to \left[\dfrac{h\Omega}{f_1 f_2} \right] \end{array}$$

Soient

$$V_0 = \{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] / \quad j(h) \in Im\rho\}$$

où ρ a été défini dans la suite exacte (4).

$$V = \left\{h \in \mathbb{C}_{d_1+d_2-3}[X, Y, Z] / \quad j(h) \in F^2(H^2(U_1 \cap U_2))\right\}$$

Alors on a $V_0 = V \cap (f_1, f_2)$. En effet, V est l'ensemble des h tels que $\pi^*(j(h)) \in \Gamma(\Omega^2(\log(X))$ où (π, X) est une résolution de $\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)$. Si par exemple, $\omega \in F^2(H^2(U_1))$ alors $\pi^*(\omega)$ ne peut avoir de pôles qu'au dessus de $\pi^{-1}(C_1)$ et ces pôles sont simples. Donc ω ne peut avoir de pôle que le long de C_1 et ces pôles sont simples. Donc $h \in (f_2)$.

Ainsi si l'on pose $\tilde{V} = V/V_0$ alors j définit un isomorphisme de $\delta(\tilde{V})$ dans $Im\delta$.

5. Exemples

Rappelons tout d'abord les résultats de l'article [**7**] dans le contexte dans lequel nous allons les utiliser. Si C est une courbe lisse de $\mathbb{P}^2$ donnée par une équation $f \in \mathbb{C}_d[X,Y,Z]$, nous pouvons définir une filtration par l'ordre du pôle (P) sur le complexe de de Rham algébrique du complément $U = \mathbb{P}^2 \backslash C$ à la courbe C par :

$$P^p(\Gamma(\Omega^q(U))) = \{\omega \in \Gamma(\Omega^q(U); ord_C(\omega) \leq q - p + 1\}$$

Cette filtration induit une filtration sur la cohomologie de U et nous avons les inclusions :

$$0 = P^3(H^2(U)) \subseteq P^2(H^2(U)) \subseteq P^1(H^2(U)) = H^2(U))$$

Nous avons les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{d-3}[X,Y,Z] & \rightarrow & P^2(H^2(U)) \\ h & \rightarrow & \text{classe de } \quad \dfrac{h\Omega}{f} \quad \text{dans} \quad P^2(H^2(U)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\dfrac{\partial f}{\partial X}, \dfrac{\partial f}{\partial Y}, \dfrac{\partial f}{\partial Z})\right)_{2d-3} & \rightarrow & Gr_P^1(H^2(U)) \\ h & \rightarrow & \text{classe de } \quad \dfrac{h\Omega}{f^2} \quad \text{dans} \quad Gr_P^1(H^2(U)) \end{array}$$

où $\left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z})\right)_{2d-3}$ désigne la composante homogène de degré $2d-3$ de l'anneau gradué $\left(\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z})\right)$.

De plus, $Gr_P^1(H^2(U))$ et $P^2(H^2(U))$ ont la même dimension qui correspond au genre de la courbe C.

Si maintenant, C est réunion de deux courbes lisses C_1 et C_2 données par des équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ de degrés respectifs d_1 et d_2, grâce aux résultats de cet article nous pouvons écrire :

$$H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \oplus \tilde{V} \simeq H^2(U_1 \cap U_2)$$

Et les résultats de [**7**] nous donnent pour $i = 1, 2$

$$H^2(U_i) \simeq \mathbb{C}_{d_i-3}[X,Y,Z] \oplus (\mathbb{C}[X,Y,Z]/(\frac{\partial f_i}{\partial X}, \frac{\partial f_i}{\partial Y}, \frac{\partial f_i}{\partial Z}))_{2d_i-3} \tag{7}$$

Pour avoir une base de $H^2(U_1 \cap U_2)$, il nous suffit donc d'obtenir une base de l'espace vectoriel $\tilde{V}$ ce que nous faisons dans les exemples suivants.

Remarque 1. — La propriété qu'une forme ω soit dans $F^2(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2)))$ se vérifie localement en chaque point singulier p en calculant une désingularisation locale de $C_1 \cup C_2$. Si p est une singularité de type A_1 c'est-à-dire si C_1 et C_2 se coupent transversalement en p alors il n'y a aucune condition à vérifier.

Pour les singularités de type A_3 on obtient une condition très simple et indépendante des coordonnées locales : si $\omega = \frac{h\Omega}{f_1 f_2}$ alors il suffit que $h(p) = 0$.

Exemple 1. — On considère les courbes C_1 et C_2 données par leurs equations homogènes :

$$C_1 : \quad X^3 + XY^2 + Z^3 = 0$$

$$C_2 : \quad X + Z = 0$$

$C_1 \cap C_2 = \{(1 : 0 : -1), (0 : 1 : 0)\}$. Nous cherchons une base de l'espace vectoriel $\tilde{V}$. $(1 : 0 : -1)$ est un point double et $(0 : 1 : 0)$ est un point simple d'intersection entre les courbes C_1 et C_2. Donc la courbe $C_1 \cup C_2$ a une singularité de type A_3 en $(1 : 0 : -1)$ et une singularité de type A_1 en $(0 : 1 : 0)$.

$$\omega = \frac{h\Omega}{f_1 f_2} \in F^2(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2))) \Rightarrow h((1 : 0 : -1)) = 0$$

d'après la remarque qui précède. Une base de $\tilde{V}$ est donc $\{Y\}$.

Et une base de $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_1 \cup C_2)$ est donc donnée par les classes des formes :

$$\left(\frac{\Omega}{f_1}, \frac{hess(f_1)\Omega}{f_1^2}, \frac{Y\Omega}{f_1 f_2} \right)$$

où $hess(f_1)$ est le Hessien de f_1.

EXEMPLE 2. — On considère les courbes C_1 et C_2 donnée par leurs équations homogènes :

$$C_1 : \quad XY + YZ + ZX = 0$$

$$C_2 : \quad X^2(X+Z) + Y^2(X+Z) + Z^2(X+Y) = 0$$

Ces deux courbes s'intersectent en trois points A, resp. B, resp. C de coordonnées homogènes (1 :0 :0), resp. (0 :1 :0), resp. (0 :0 :1) qui sont singuliers de type A_3 pour la réunion $C_1 \cup C_2$. D'après la remarque :

$$\omega = \frac{h\Omega}{f_1 f_2} \in F^2(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2))) \Rightarrow h(A) = h(B) = h(C) = 0$$

Une base de $\tilde{V}$ est donc : XY, YZ car

$$[XZ] = -[XY] - [YZ]$$

dans $\tilde{V}$.

Et une base de $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_1 \cup C_2)$ est donc donnée par les classes des formes :

$$\left(\frac{\Omega}{f_2}, \frac{hess(f_2)\Omega}{f_2^2}, \frac{XY\Omega}{f_1 f_2}, \frac{YZ\Omega}{f_1 f_2} \right)$$

EXEMPLE 3. — On considère la courbe de l'espace affine $\mathbb{C}^2$ donnée par son équation $(f = 0)$

$$f = f_0 + \ldots + f_d$$

que l'on décompose en somme de composantes homogènes. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- la courbe C de $\mathbb{P}^2$ définie par l'homogénéisée de f : $\tilde{f}(X, Y, Z) = f_0 Z^d + \ldots + f_d$ est lisse.
- Soit $L_\infty : Z = 0$ la droite à l'infini. Alors $|L_\infty \cap C| = d$

On veut calculer $\delta(H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \{C \cup L_\infty\}))$. D'après le théorème de Bezout tous les points d'intersections de L_∞ avec C sont simples. On peut donc prendre pour base de $\tilde{V}$, $(X^i Y^{d-2-i})_{i=0}^{d-2}$.

Comme $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash L_\infty) = 0$, on a

$$H^2(\mathbb{P}^2 \backslash \{C \cup L_\infty\}) \simeq \mathbb{C}_{d-3}[X, Y, Z] \oplus \left(\mathbb{C}[X, Y, Z]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}, \frac{\partial f}{\partial Z}) \right)_{2d-3} \oplus \tilde{V}$$

6. Cohomologie de la fibre générique

Dans cette section, nous donnons une méthode pour exhiber une base explicite de la cohomologie de la fibre générique.

Nous avons la suite de Gysins suivante :

$$H^1(U\backslash F) \stackrel{res}{\to} H^0(F) \stackrel{\partial}{\to} H^2(U) \to H^2(U\backslash F) \stackrel{\mathrm{res}}{\to} H^1(F) \stackrel{\partial}{\to} H^3(U)$$

où res désigne le morphisme résidu.

On peut maintenant comparer cette dernière suite avec la suite de Mayer-Vietoris :

$$0 \to H^2(U) \bigoplus H^2(\mathbb{P}^2\backslash\overline{F}) \to H^2(U\backslash F) \stackrel{res}{\to} \mathbb{C}^{\sharp-1} \to 0$$

où $\sharp$ désigne le cardinal de $\overline{F} \cap C$.

Les résultats du premier chapitre nous permettent de calculer des bases explicites pour $H^2(U\backslash F)$. En prenant le résidu, cela donne des bases explicites de la cohomologie de de Rham de $H^1(F)$.

Exemple 4. — Nous considèrons donc les deux courbe C_1 et C_2 de $\mathbb{P}^2$ d'équations respectives :

$$C_1 : xy + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{8}$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{9}$$

Les points d'intersection de ces courbes sont solutions du système :

$$\begin{cases} C_1 : xy + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ C_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Nous avons 4 points d'intersection de coordonnées homogènes :

$$(0 : 1 : i), (0 : 1 : -i), (1 : 0 : i), (1 : 0 : -i)$$

En reprenant les notations de la première section, une base de $\tilde{V}$ est : $\{X, Y, Z\}$. Donc une base de $H^2(U\backslash F)$ est :

$$\{\frac{X\Omega}{h}, \frac{Y\Omega}{h}, \frac{Z\Omega}{h}\}$$

où $h = (XY + X^2 + Y^2 + Z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)$.

Exemple 5. — Nous considèrons maintenant les deux courbes C_1 et C_2 de $\mathbb{P}^2$ d'équation respectives :

$$C_1 : f_1 = xyz \tag{11}$$

$$C_2 : f_2 = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \tag{12}$$

Une base pour $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash (C_1 \cup C_2))$ est donnée en mettant ensemble :

1. une base pour $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_1)$, par exemple
$$\frac{\Omega}{f_1}, \frac{XYZ\Omega}{f_1^2}$$
2. une base pour $H^2(\mathbb{P}^2 \backslash C_2) = H^2(\mathbb{A}^2 \backslash \{XY = 0\})$, par exemple :
$$\frac{dX}{X} \wedge \frac{dY}{Y}$$
en écriture affine sur $\mathbb{A}^2$ ou bien
$$\frac{d\frac{X}{Z}}{\frac{X}{Z}} \wedge \frac{d\frac{Y}{Z}}{\frac{Y}{Z}} = \frac{\Omega}{f_2}$$
3. une base pour l'espace $\tilde{V} = \left(\frac{\mathbb{C}[X,Y,Z]}{(f_1,f_2)}\right)$ donc les 8 monômes de degré 3 dans $\mathbb{C}$ différents de XYZ et de X^3.

Ce calcul nous donne 11 formes différentielles. La forme $\frac{\Omega}{f^2}$ est dans le noyau du résidue et donc les 10 autres résidus forment une base pour $H^1(F)$.

Références

[1] M. F. Atiyah, R. Bott, and L. Gording. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I. *Uspehi Mat. Nauk*, 26(2(158)) :25–100, 1971. Translated from the English by Ju. V. Egorov and A. L. Oniščik.

[2] P. Deligne. Théorie de hodge ii. *Publ. I.H.E.S*, 40 :5–57, 1971.

[3] P. Deligne and A. Dimca. Filtrations de hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 23 :645–656, 1990.

[4] A. Dimca. *Singularities and Topology of Hypersurfaces*. Springer-Verlag, universitext edition, 1992.

[5] P. Griffiths et J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley, 1994.

[6] A. Fujiki. Duality of mixed hodge structures of algebraic varieties. *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 16 :635–667, 1980.

[7] P. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 :228–296, 1970.

[8] P. Griffiths. Variations on a theorem of abel. *Inventiones mathematicae*, 35 :321–390, 1976.

[9] E. K. Leĭnartas. Factorization of rational functions of several variables into partial fractions. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1978(10(197)) :47–51.

[10] J. Milnor. *Morse theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51.

[11] A. K. Tsikh. *Multidimensional residues and their applications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992. Translated from the 1988 Russian original by E. J. F. Primrose.