Sur un théorème de Denef et Loeser

David Bourqui [1]

Abstract : A theorem of Denef and Loeser allows to associate a virtual motive to a first order ring formula. An extension of this result, which provides a more intuitive comprehension of the construction of Denef and Loeser, is stated without proof in a survey paper by Hales. In this note, we give such a proof. A more conceptual approach, yielding a more general result, is developed in a recent paper of J. Nicaise. Our viewpoint, though more naive, has the advantage to require only basic notions of algebraic geometry and model theory.

MSC 2000 : primary 12E30, 12F10 ; secondary 03C10, 03C98, 12F10

Keywords : pseudo-finite fields ; Galois covers

1 Introduction

Soit φ une formule dans le langage des anneaux en n variables libres à coefficients dans le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels. Pour tout nombre premier p assez grand et tout $r \geqslant 1$, on peut considérer l'ensemble $\varphi(\mathbf{F}_{p^r})$ des éléments de $(\mathbf{F}_{p^r})^n$ qui satisfont l'interprétation de la formule φ dans $\mathbf{F}_{p^r}$. Si φ est une conjonction d'équations polynômiales, cet ensemble n'est autre que l'ensemble des points à valeurs dans $\mathbf{F}_{p^r}$ de la variété affine définie par ces équations. Dans [8], Kiefe montre, par un procédé d'élimination de quantificateurs, que si φ est quelconque, il existe des variétés $V_1, \ldots, V_d$ définies sur $\mathbf{Q}$ et des nombres rationnels $r_1, \ldots, r_d$ tels que pour tout nombre premier p assez grand et tout $r \geqslant 1$, on ait (désignant par $|A|$ le cardinal de l'ensemble A) :

$$|\varphi(\mathbf{F}_{p^r})| = \sum_{i=1}^{d} r_i \, |V_i(\mathbf{F}_{p^r})| \, . \tag{1.1}$$

Par exemple, si φ est la formule $(\exists y, x = y^2) \wedge (x \neq 0)$, on peut prendre $d = 1$, V_1 la droite affine privée de l'origine et $r_1 = \frac{1}{2}$.

Plus récemment, Denef et Loeser ont montré qu'une telle famille (V_i, r_i) pouvait être associée de manière canonique à φ, au sens où le motif virtuel à coefficients rationnels défini par une telle famille ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la formule φ. Plus précisément, ils montrent qu'il existe une unique application χ qui à une formule φ associe une combinaison à coefficients rationnels de motifs virtuels de variétés définies sur $\mathbf{Q}$ et qui est astreinte aux conditions naturelles suivantes :

[1] I.R.M.A.R, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.
E-mail address : david.bourqui@univ-rennes1.fr

1. si φ et φ' sont des formules, telles que pour tout p assez grand et tout $r \geqslant 1$, il existe une bijection de $\varphi(\mathbf{F}_{p^r})$ sur $\varphi'(\mathbf{F}_{p^r})$, et telles que ces bijections sont définissables par une formule indépendante de p et r, alors
$$\chi(\varphi) = \chi(\varphi') \quad ; \tag{1.2}$$
2. si φ est une conjonction d'équations polynômiales, $\chi(\varphi)$ coïncide avec le motif virtuel de la variété affine définie par φ ;
3. Si φ et ψ ont les mêmes variables libres, on a
$$\chi(\varphi \vee \psi) + \chi(\varphi \wedge \psi) = \chi(\varphi) + \chi(\psi) \quad ; \tag{1.3}$$

plus une condition supplémentaire, a priori moins naturelle que les conditions précédentes, qui fait intervenir des relations que sont astreintes à vérifier les images par χ de certaines formules associées à des revêtements galoisiens non ramifiés (qui sont des généralisations de la formule $(\exists y, x = y^2) \wedge (x \neq 0)$, où le revêtement mis en jeu est simplement le revêtement $x \mapsto x^2$ de la droite affine privée de l'origine). On se reportera à l'énoncé du théorème 2.2 ci-dessous pour plus de précision. Cette condition s'«explique» notamment par le fait que la preuve utilise la théorie d'élimination des quantificateurs en termes de formules galoisiennes développée par Fried, Haran, Jarden et Sacerdote.

La motivation de Denef et Loeser pour ce résultat était le développement d'une théorie de l'intégration motivique arithmétique. Dans son article [7] d'introduction à cette même théorie, Hales affirme sans preuve que le résultat ci-dessus reste vrai si l'on remplace cette condition «galoisienne» par la condition plus naturelle suivante, qui généralise d'une part la condition 1. ci-dessus, et d'autre part la condition galoisienne : si φ et φ' sont des formules et d est un entier tels que pour tout p assez grand et tout $r \geqslant 1$, il existe une application d pour 1 de $\varphi(\mathbf{F}_{p^r})$ sur $\varphi'(\mathbf{F}_{p^r})$, et tels que ces applications sont définissables par une formule indépendant de p et r, alors
$$\chi(\varphi) = d\,\chi(\varphi'). \tag{1.4}$$
Le fait que cette dernière condition soit plus intuitive et naturelle que la condition galoisienne est sans doute ce qui a poussé Hales à son utilisation dans le cadre d'un article d'introduction et de vulgarisation. Le but de la présente note est de donner une démonstration du résultat énoncé par Hales. L'énoncé précis du résultat figure à la section suivante (théorème 2.3), après quelques rappels et l'énoncé du résultat de Denef et Loeser (théorème 2.2). Notons que le théorème 2.2 est une conséquence du théorème 2.3, mais que la preuve que nous donnons de ce théorème utilise en fait de manière cruciale le théorème 2.2.

Pendant la correction de cette note, Nicaise nous a signalé que la machinerie motivique développée dans sa prépublication [10] permettait de montrer de manière directe le résultat énoncé par Hales, qui plus est dans un cadre relatif. Ceci est expliqué dans la version publiée [11]. La démonstration que nous proposons apparaît alors comme une version «naïve» de cette approche. Son avantage est que, pour peu qu'on considère le théorème 2.2 et le théorème 3.1 d'élimination de quantificateurs comme des «boîtes noires», elle ne fait appel qu'à des notions élémentaires de géométrie algébrique.

2 Terminologie, notations, rappels et énoncé du résultat

Soit d un entier positif non nul. Une application f d'un ensemble A vers un ensemble B est dite *d pour* 1 si tout élément de B a exactement d antécédents par f dans A. On notera que si B est vide (ce qui entraîne la vacuité de A), f est d pour 1 quel que soit l'entier d.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Une *variété* définie sur k est un schéma réduit séparé de type fini sur k. Une variété *quasi-affine* définie sur k est une sous-k-variété localement fermée d'une variété affine définie sur k. Un *revêtement galoisien* est un morphisme fini étale $Y \to X$, où X et Y sont des schémas normaux intègres, tel que X s'identifie au quotient $Y/\operatorname{Aut}_X(Y)$ (ainsi, dans ce texte, les revêtements sont toujours supposés non ramifiés). Le groupe fini $\operatorname{Aut}_X(Y)$ est le groupe de Galois du revêtement.

Soit $Y \to X$ un k-revêtement galoisien de groupe G, K une extension de k et $x : \operatorname{Spec}(K) \to X$ un élément de $X(K)$. Les *groupes de décomposition* de x dans le revêtement $Y \to X$ sont les groupes de Galois des revêtements galoisiens au dessus de $\operatorname{Spec}(K)$ induits par les composantes irréductibles de $Y \times_X \operatorname{Spec}(K)$. Ils sont conjugués dans G.

Lemme 2.1
Soit $Y \to X$ un k-revêtement galoisien de groupe G, K une extension de k et C un sous-groupe de G.

1. *Les éléments de $X(K)$ admettant C comme groupe de décomposition sont ceux qui se relèvent en un élément de $Y/C(K)$ et pour tout sous-groupe strict D de C ne se relèvent pas en un élément de $Y/D(K)$.*
2. *L'application $Y/C(K) \to X(K)$ induit une application $\frac{|N_G(C)|}{|C|}$ pour 1 de l'ensemble des éléments de $Y/C(K)$ admettant C pour groupe de décomposition vers l'ensemble des éléments de $X(K)$ admettant C pour sous-groupe de décomposition.*

Démonstration : Pour $x \in X(K)$, on note $Y_x \subset Y(\overline{K})$ la fibre géométrique au-dessus de x. Le lemme découle alors aussitôt des deux remarques suivantes : d'une part, les groupes de décomposition de x dans le revêtement $Y \to X$ sont les stabilisateurs de l'action de G sur l'ensemble quotient $Y_x/\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$; d'autre part, pour tout sous-groupe C de G, il y a une bijection naturelle entre les éléments de $Y/C(K)$ s'envoyant sur x et les éléments de $Y_x/\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ stables sous l'action de C. $\square$

Soit X une variété affine, normale et irréductible définie sur k, L une extension finie galoisienne de $k(X)$, de groupe G. Pour tout ouvert affine U de X, soit A_U la clôture intégrale de $k[U]$ dans L. Alors $\operatorname{Spec}(A_U)$ est une variété affine, normale et irréductible définie sur k, et pour U assez petit $\operatorname{Spec}(A_U) \to U$ est un revêtement galoisien de groupe G.

On note Var_k la catégorie des variétés sur k, et $K_0(\mathrm{Var}_k)$ l'anneau de Grothendieck associé, défini comme suit : le groupe sous-jacent à $K_0(\mathrm{Var}_k)$ est le groupe abélien libre engendré par les symboles $[V]$ où V est une variété sur k, quotienté par les relations $[V] = [F] + [V \setminus F]$ pour toute sous-variété fermée F de V et $[V] = [W]$ si V et W sont k-isomorphes. Le produit est donné par $[V]\,[W] \overset{\text{déf}}{=} [V \times_k W]$.

Désignons par CHMot_k la catégorie des motifs de Chow sur k (cf. par exemple [12] et [9]) et $K_0(\mathrm{CHMot}_k)$ son anneau de Grothendieck. Si k est de caractéristique zéro, il existe d'après [5, Theorem 4] (cf. aussi [6] et [1]) un unique morphisme

$$\widetilde{\chi} \,:\, K_0(\mathrm{Var}_k) \to K_0(\mathrm{CHMot}_k) \tag{2.1}$$

tel que la classe $[X]$ d'une variété X projective et lisse sur k s'envoie sur la classe du motif de Chow qui lui est associé.

Concernant les rappels qui suivent, on renvoie par exemple à [2] et [3] pour plus de détails. Une *formule d'anneau du premier ordre à coefficients dans k* est une formule logique construite à partir d'un ensemble dénombrable de variables, d'équations polynômiales à coefficients dans k, de combinaisons booléenes et de quantificateurs universels et existentiels. On abrégera par la suite le terme formule d'anneau du premier ordre à coefficients dans k en *formule à coefficients dans k* voire *formule* si le corps k est clairement indiqué par le contexte.

Pour toute formule φ à coefficients dans k en n variables libres et toute extension K de k on notera $\varphi(K)$ le sous-ensemble de K^n constitué des éléments de K^n satisaisant l'interprétation de φ dans K. Si X est une variété quasi-affine, on appellera *formule sur X* toute formule en n variables libres de la forme $\varphi \wedge \varphi_X$ où φ est une formule quelconque et φ_X la formule définissant les équations d'un plongement de X dans l'espace affine $\mathbf{A}^n$.

Un *corps pseudo-fini* K est un corps parfait possédant pour tout $n \geqslant 1$ une unique extension de degré n dans une clôture algébrique fixée et tel que toute variété géométriquement irréductible sur K a un point rationnel dans K. Toute extension finie d'un corps pseudo-fini est cyclique. Tout corps k admet une extension K qui est un corps pseudo-fini.

Deux formules φ et ψ à coefficients dans k en m et n variables libres respectivement sont dites *logiquement équivalentes* s'il existe une formule θ en $n+m$ variables libres telle que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'ensemble $\theta(K) \subset K^n \times K^m$ est le graphe d'une bijection de $\varphi(K)$ sur $\psi(K)$.

Soient φ et ψ des formules à coefficients dans k en m et n variables libres respectivement. On dit que ψ est un *d-revêtement* de φ s'il existe une formule θ

en $n+m$ variables libres telle que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'ensemble $\theta(K) \subset K^n \times K^m$ est le graphe d'une application d pour 1 de $\psi(K)$ sur $\varphi(K)$. Ainsi, ψ est un 1-revêtement de φ si et seulement si φ et ψ sont logiquement équivalentes.

Les formule galoisiennes constituent une classe importante de formule, notamment pour l'élimination des quantificateurs dans la théorie des corps pseudo-finis. Étant donné un revêtement galoisien $Y \to X$ de groupe G, où X et Y sont des variétés affines normales irréductibles, et C un sous-groupe cyclique de G, on note $\varphi_{Y,X,C}$ une formule sur X telle que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\varphi_{Y,X,C}(K)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $X(K)$ dont l'un des groupes de décomposition dans le revêtement $Y \to X$ est égal à C. Le point 1 du lemme 2.1 montre l'existence d'une telle formule $\varphi_{Y,X,C}$.

Le groupe de Grothendieck de la théorie des corps pseudo-finis sur k, noté $K_0(\mathrm{PFF}_k)$, est le groupe engendré par les symboles $[\varphi]$, où φ est une formule à coefficients dans k et les relations $[\varphi] = [\psi]$ si φ et ψ sont logiquement équivalentes, ainsi que $[\varphi \vee \psi] + [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] + [\psi]$ si φ et ψ ont les mêmes variables libres.

Denef et Loeser montrent alors le résultat suivant (cf. [3, Theorem 2.1]).

Théorème 2.2 (Denef, Loeser)
Il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\chi \,:\, K_0(PFF_k) \longrightarrow \widetilde{\chi}(K_0(\mathrm{Var}_k)) \otimes \boldsymbol{Q} \subset K_0(CHMot_k) \otimes \boldsymbol{Q} \tag{2.2}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

1. *si φ est une conjonction d'équations polynômiale, alors $\chi([\varphi])$ coïncide avec la classe de la variété affine définie par ces équations ;*
2. *si X et Y sont des variétés normales affines irréductibles, et $Y \to X$ est un revêtement galoisien de groupe G, pour tout sous-groupe cyclique C de G, on a la relation*

$$\chi\left([\varphi_{Y,X,C}]\right) = \frac{|C|}{|N_G(C)|}\chi\left([\varphi_{Y,Y/C,C}]\right). \tag{2.3}$$

L'intérêt pour la notion de corps pseudo-fini remonte à Ax, qui a démontré qu'une formule close à coefficients dans $\mathbf{Q}$ était satisaite dans tout corps pseudo-fini de caractéristique zéro si et seulement si elle était satisaite dans tout corps fini de caractéristique assez grande. Ceci montre que l'énoncé du théorème ci-dessus redonne bien pour $k = \mathbf{Q}$ la situation décrite dans l'introduction.

Le théorème 2.2 peut se reformuler de la façon qui suit : remarquons d'abord qu'il existe un morphisme naturel de $K_0\left(\mathrm{Var}_k\right)$ vers $K_0(\mathrm{PFF}_k)$, qui à la classe d'une variété affine associe la classe d'une formule donnée par des équations d'un plongement de la variété. Notons $K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{Gal}}$ le quotient de l'anneau $K_0(\mathrm{PFF}_k)$ par l'idéal engendré par les relations $[\varphi_{Y,X,C}] - \frac{|C|}{|N_G(C)|}[\varphi_{Y,Y/C,C}]$. Le théorème 2.2 dit que le morphisme

$$K_0\left(\mathrm{Var}_k\right) \longrightarrow \widetilde{\chi}\left(K_0(\mathrm{Var}_k)\right) \otimes \mathbf{Q} \tag{2.4}$$

de Gillet, Soulé et al. se factorise de manière unique à travers le morphisme

$$K_0\left(\mathrm{Var}_k\right) \longrightarrow K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{Gal}}. \tag{2.5}$$

Notons à présent $K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{rev}}$ le quotient de l'anneau $K_0(\mathrm{PFF}_k)$ par l'idéal engendré par les relations $[\psi] - d[\varphi]$ où d est un entier positif quelconque et φ et ψ sont des formules telles que ψ est un d-revêtement de φ.

Il est à noter que la formule $\varphi_{Y,Y/C,C}$ est un $\frac{|N_G(C)|}{|C|}$ -revêtement de la formule $\varphi_{Y,X,C}$. Ainsi on a un morphisme quotient

$$K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{Gal}} \longrightarrow K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{rev}}. \tag{2.6}$$

L'énoncé du théorème 2.8 de [7] revient à affirmer que le morphisme

$$K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{Gal}} \to \widetilde{\chi}\left(K_0(\mathrm{Var}_k)\right) \otimes \mathbf{Q} \tag{2.7}$$

construit par Denef et Loeser se factorise à travers $K_0(\mathrm{PFF}_k)_{\mathrm{rev}}$.

Nous donnons ici une preuve de ce résultat, i.e. nous prouvons

Théorème 2.3
Soient φ et ψ deux formules telles que ψ est un n-revêtement de φ. Alors on a

$$\chi\left([\varphi]\right) = n\,\chi\left([\psi]\right). \tag{2.8}$$

La démonstration figure à la section 3. Décrivons-en avant tout les grandes lignes. L'idée est de se ramener, via la théorie de l'élimination des quantificateurs en termes de stratifications galoisiennes (théorème 3.1), au cas où le n-revêtement est donné par des formules du type $\varphi_{Y,X,C}$ et $\varphi_{Y,Y/C,C}$, afin d'appliquer le théorème 2.2.

En fait, une réduction immédiate montre qu'il suffit d'établir le résultat suivant : soit $f : Z \to X$ un morphisme entre deux variétés affines définies sur k, φ une formule sur X et ψ une formule sur Z tel que pour tout corps pseudo-fini K contenant k le morphisme f induise une application n pour 1 de $\psi(K)$ vers $\varphi(K)$. Alors on a $\chi\left([\psi]\right) = n\,\chi\left([\varphi]\right)$.

Pour montrer ce dernier résultat, on se ramène tout d'abord aussitôt, via une stratification galoisienne de φ, au cas où φ est une formule galoisienne $\varphi_{Y,X,C}$.

Les résultats de la sous-section 3.2.1 permettent alors de montrer que le support de φ est contenu dans une sous-variété de Z de dimension au plus $\dim(X)$.

En utilisant une récurrence sur la dimension (mise en oeuvre à la sous-section 3.2.3), on se ramène alors au cas où f est un morphisme fini.

On conclut à partir de là en utilisant une stratification galoisienne de ψ et le théorème de Denef et Loeser (sous-section 3.2.2).

3 Preuve du résultat

3.1 Préliminaires : stratifications galoisiennes, élimination de quantificateurs et lemme de Cebotarev

Soit X une variété quasi-affine définie sur k. Une *stratification galoisienne* de X est la donnée d'une famille finie $(X_i)_{i\in I}$ de sous-k-variétés localement fermées normales et irréductibles de X, formant une partition de X, et, pour tout $i \in I$, d'un revêtement galoisien $Y_i \to X_i$ de groupe G_i et d'une famille (éventuellement vide) $C_{i,j}$ de sous-groupes cycliques de G_i deux à deux non conjugués.

À toute stratification galoisienne $\mathcal{B} = (X_i, Y_i \to X_i, (C_{i,j}))$ sur X est associée une formule sur X, à savoir

$$\varphi_{\mathcal{B}} \overset{\text{déf}}{=} \bigvee_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} \varphi_{Y_i,X_i,C_{i,j}}. \tag{3.1}$$

Il est à noter que les formules $\varphi_{Y_i,X_i,C_{i,j}}$ forment une partition de la formule $\varphi_{\mathcal{B}}$.

Le résultat suivant d'élimination de quantificateurs est dû à Fried, Haran et Jarden.

Théorème 3.1
Soit φ une formule sur X. Il existe une stratification galoisienne $\mathcal{B}$ de X telle que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, on a

$$\varphi_{\mathcal{B}}(K) = \varphi(K). \tag{3.2}$$

Démonstration : On se ramène aussitôt au cas où X est l'espace affine $\mathbf{A}^n$, dont les coordonnées sont notés $(x_1, \ldots, x_n)$. D'après [4, Remark 25.8], il existe un entier $m \geqslant 0$, une stratification galoisienne $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{A}^{n+m}$, et pour $1 \leqslant i \leqslant m$ des quantificateurs Q_i tels que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, on a

$$\varphi(K) = \left(Q_1 y_1 \ldots Q_m y_m \;\; \varphi_{\mathcal{B}'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right)(K). \tag{3.3}$$

On applique alors la proposition 25.9 de [4] (les corps pseudo-finis sont des corps de Frobenius). □

Il est à noter qu'en particulier $\varphi_{\mathcal{B}}$ et φ sont logiquement équivalentes. On appellera *stratification galoisienne de* φ toute stratification galoisienne de X vérifiant (3.2).

On énonce à présent deux lemmes élémentaires sur les groupes de décompositions, qui découlent facilement du lemme 2.1.

Lemme 3.2
Soient X et Y des variétés affines, normales et irréductibles définies sur k. Soit $Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G, et H un sous-groupe distingué de G. Soit C un sous-groupe cyclique de G/H et $\mathcal{D}$ un système de représentants des classes de conjugaison dans G des sous-groupes cycliques de G d'image C dans G/H. Alors les formules $(\varphi_{Y,X,D})_{D\in\mathcal{D}}$ forment une partition de $\varphi_{Y/H,X,C}$.

Lemme 3.3
Soient X et Y des variétés affines, normales et irréductibles définies sur k, $Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G, H un sous-groupe de G, C un sous-groupe cyclique de H, et f le morphisme naturel $Y/H \to X$. Soit $\mathcal{D}$ un système de représentants des classes de conjugaison dans H des sous-groupes cycliques de H qui sont conjugués dans G à C.

Alors pour tout corps pseudo-fini K contenant k, on a

$$f^{-1}\left(\varphi_{Y,X,C}(K)\right) \cap Y/H(K) = \bigvee_{D \in \mathcal{C}} \varphi_{Y,Y/H,D}(K). \tag{3.4}$$

En outre pour $D \in \mathcal{D}$ l'application

$$\varphi_{Y,Y/H,D}(K) \longrightarrow \varphi_{Y,X,C}(K) \tag{3.5}$$

induite par f est $\frac{|N_G(D)|}{|N_H(D)|}$ pour 1.

Lemme 3.4
Sous les notations et hypothèses du lemme 3.3, on a pour $D \in \mathcal{D}$

$$\chi\left(\varphi_{Y,Y/H,D}\right) = \frac{|N_G(D)|}{|N_H(D)|}\, \chi\left(\varphi_{Y,X,C}\right). \tag{3.6}$$

Démonstration : D'après le théorème 2.2 on a

$$\chi\left(\varphi_{Y,Y/H,D}\right) = \frac{|D|}{|N_H(D)|}\, \chi\left(\varphi_{Y,Y/D,D}\right) \tag{3.7}$$

Comme D et C sont conjugués dans G les formules $\varphi_{Y,X,C}$ et $\varphi_{Y,X,D}$ sont logiquement équivalentes, et on a d'après le théorème 2.2

$$\chi\left(\varphi_{Y,X,C}\right) = \chi\left(\varphi_{Y,X,D}\right) = \frac{|D|}{|N_G(D)|}\, \left(\varphi_{Y,Y/D,D}\right) \tag{3.8}$$

d'où le résultat. □

Lemme 3.5 (Nicaise)
Soient X et Y des variétés affines, normales et irréductibles sur k. Soit $Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G. Soit C un sous-groupe cyclique de G. Alors il existe un corps pseudo-fini K contenant k tel que $\varphi_{Y,X,C}(K)$ soit non vide. En outre, si $\dim(X) \geqslant 1$, on peut trouver un tel K tel que $\varphi_{Y,X,C}(K)$ soit infini.

Démonstration : Ceci découle immédiatemment du corollaire 2.9 et du lemme 2.10 de [11]. □

3.2 Démonstration du résultat

3.2.1 Première étape

Lemme 3.6
Soient X et Z des variété affines, normales, irréductibles, définies sur k, $f : Z \to X$ un morphisme, $Y \to Z$ un revêtement galoisien de groupe G, et C un sous-groupe cyclique de G. On suppose en outre qu'on a $\dim Z > \dim X$. Il existe alors un corps pseudo-fini K contenant k tel que l'application

$$\varphi_{Y,Z,C}(K) \to X(K) \tag{3.9}$$

induite par f possède une fibre de cardinal infini.

Démonstration : D'après le lemme 3.5, il existe un corps pseudo-fini K contenant k tel que $\varphi_{Y,Z,C}(K)$ soit non vide. Soit z un élément de $\varphi_{Y,Z,C}(K)$ et $x = f(z)$. Comme on a $\dim(Z) > \dim(X)$, la fibre de f en x est un fermé de Z_K dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension supérieure à 1. Soit F_z une composante irréductible de cette fibre qui contient z et Y_z une composante irréductible de $Y \times_Z F_z$. On a donc un revêtement galoisien $Y_z \to F_z$ de groupe G_F, où G_F est un sous-groupe de G. Comme z est dans $F_z(K)$ et a pour groupe de décomposition C dans $Y \to Z$, on peut supposer que C est inclus dans G_F. Il existe alors d'après le lemme 3.5 un corps pseudo-fini L contenant K tel que $\varphi_{Y_z,F_z,C}(L)$ est infini. Ainsi la fibre de l'application $\varphi_{Y,Z,C}(L) \to X(L)$ au dessus de x (vu comme un L-point de X) est de cardinal infini. □

Proposition 3.7
Soient Z, X des variétés algébriques quasi-affines sur k, ψ une formule sur Z et $f : Z \to X$ un morphisme. On suppose que $\dim(Z) > \dim(X)$ et que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'application $\psi(K) \to X(K)$ induite par f est à fibres de cardinal fini. Il existe alors une sous-variété localement fermée Z' de Z avec $\dim(Z') < \dim(Z)$ telle que pour tout corps pseudo-fini K contenant k on ait $\psi(K) \subset Z'(K)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = (Z_i, Y_i \to Z_i, (C_{i,j}))$ une stratification galoisienne de la formule ψ. Soit Z_{i_0} une strate de dimension maximale. On a ainsi $\dim(Z_{i_0}) > \dim(X)$. Si C est un sous-groupe cyclique du groupe de Galois de $Y_{i_0} \to Z_{i_0}$, le lemme 3.6 donne l'existence d'un corps pseudo-fini K contenant k tel que $\varphi_{Y_{i_0},Z_{i_0},C}(K) \to X(K)$ possède une fibre de cardinal infini. L'hypothèse sur ψ implique donc que la famille $(C_{i_0,j})$ est vide. On peut alors prendre pour Z' la réunion de toutes les strates de $\mathcal{B}$ qui ne sont pas de dimension maximale. □

3.2.2 Deuxième étape

Lemme 3.8
Soit X une variété affine, normale et irréductible, et Z une union disjointe finie de variétés affines normales et irréductibles. Soit $Z \xrightarrow{f} X$ un morphisme fini, ψ

une formule sur Z et φ une formule sur X. On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée : il existe un entier positif n tel que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, on a

$$f(\psi(K)) = \varphi(K) \tag{3.10}$$

et l'application $\psi(K) \to \varphi(K)$ induite par f est n pour 1.

Alors, quitte à remplacer X par un ouvert affine non vide de X, φ par sa restriction à cet ouvert, Z par l'image réciproque de cet ouvert et ψ par sa restriction à cette image réciproque, on a :

$$\chi(\psi) = n\,\chi(\varphi)\,. \tag{3.11}$$

Démonstration : Traitons d'abord le cas où Z est irréductible. En utilisant une stratification galoisienne de φ et en se restreignant à la strate ouverte, on se ramène au cas où φ est une formule galoisienne $\varphi_{Y,X,C}$.

En considérant une extension galoisienne de $k(X)$ dominant $k(Y)$ et $k(Z)$, on peut, quitte à remplacer X par un ouvert affine non vide, trouver un revêtement galoisien $T \to X$ dominant Z et Y. En utilisant le lemme 3.2, et compte tenu du fait que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, (3.10) montre que tout élément de $\varphi_{Y,X,C}(K)$ se relève à $Z(K)$, on peut supposer que $T = Y$ et $Z = Y/H$, où H est un sous-groupe de G contenant C.

Soit alors $\mathcal{B}$ une stratification galoisienne de ψ et soit V la strate ouverte de $\mathcal{B}$. Comme $Z \to X$ est étale, il existe un ouvert affine non vide U de X tel que $f^{-1}(U) \subset V$. On peut ainsi supposer que ψ est de la forme $\bigvee_{D\in\mathcal{D}} \varphi_{T,Z,D}$, où $T \to Z$ est un revêtement galoisien (dont le groupe de Galois sera noté Γ) et $\mathcal{D}$ une famille de sous-groupe cycliques de Γ deux à deux non conjugués.

On peut trouver un revêtement galoisien de X dominant Y et T. En utilisant le lemme 3.2, on peut alors supposer que T est un revêtement galoisien de X dominant Y. La situation est décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl] \arrow[dd, "\Gamma"] \arrow[ddd, bend left=60, "\Lambda"] \\
Y \arrow[dr, "H"] \arrow[ddr, bend right, "G"'] & \\
& Z \arrow[d, "f"] \\
& X
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Soit $\mathcal{C}$ un système de représentants des Λ-classes de conjugaisons des sous-groupes cycliques de Λ dont l'image dans G est conjuguée à C. D'après le lemme 3.2, les formules $(\varphi_{T,X,C'})_{C'\in\mathcal{C}}$ forment une partition de $\varphi_{Y,X,C}$. Par hypothèse, pour tout corps pseudo-fini K contenant k et tout $C' \in \mathcal{C}$, $\varphi_{T,X,C'}(K)$ se relève à $Z(K) = T/\Gamma(K)$. Comme $\varphi_{T,X,C'}(K)$ est non vide pour un choix convenable de K (lemme 3.5), C' est conjugué dans Λ à un sous-groupe de Γ. On peut donc supposer que tout élément $C' \in \mathcal{C}$ est inclus dans Γ.

Pour $C' \in \mathcal{C}$, soit $\mathcal{E}(C')$ un système de représentants des Γ-classes de conjugaisons de C'. D'après le lemme 3.3, on a pour tout corps pseudo-fini K contenant k

$$f^{-1}(\varphi_{T,X,C'}(K)) \cap Z(K) = \bigvee_{D \in \mathcal{E}(C')} \varphi_{T,Z,D}(K) \tag{3.13}$$

soit

$$f^{-1}(\varphi_{Y,X,C}(K)) \cap Z(K) = \bigvee_{C' \in \mathcal{C}} \bigvee_{D \in \mathcal{E}(C')} \varphi_{T,Z,D}(K) \tag{3.14}$$

D'après (3.10), on a donc

$$\bigvee_{D \in \mathcal{D}} \varphi_{T,Z,D}(K) \subset \bigvee_{C' \in \mathcal{C}} \bigvee_{D \in \mathcal{E}(C')} \varphi_{T,Z,D}(K). \tag{3.15}$$

Ainsi quitte à modifier les représentants D de $\mathcal{D}$ on peut supposer qu'on a

$$\mathcal{D} \subset \bigsqcup_{C' \in \mathcal{C}} \mathcal{E}(C'). \tag{3.16}$$

On a alors pour tout $C' \in \mathcal{C}$ et pour tout corps pseudo-fini K contenant k

$$f^{-1}(\varphi_{T,X,C'}(K)) \cap \psi(K) = \bigvee_{D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}(C')} \varphi_{T,Z,D}(K). \tag{3.17}$$

Or, d'après le lemme 3.3, pour tout $D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}(C')$, l'application

$$\varphi_{T,Z,D}(K) \to \varphi_{T,X,C'}(K) \tag{3.18}$$

est $\frac{|N_\Lambda(D)|}{|N_\Gamma(D)|}$ pour 1. Compte tenu de (3.17) et du fait que $\psi(K) \to \varphi(K)$ est n pour 1, l'application

$$\bigvee_{D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}(C')} \varphi_{T,Z,D}(K) \to \varphi_{T,X,C'}(K) \tag{3.19}$$

est n pour 1. Or $\varphi_{T,X,C'}(K)$ est non vide pour un choix convenable de K (lemme 3.5). On a donc

$$n = \sum_{D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}(C')} \frac{|N_\Lambda(D)|}{|N_\Gamma(D)|}. \tag{3.20}$$

Ainsi on a

$$n\,\chi\left(\varphi_{Y,X,C}\right) = n \sum_{C' \in \mathcal{C}} \chi\left(\varphi_{T,X,C'}\right) \tag{3.21}$$

$$= \sum_{C' \in \mathcal{C}} \sum_{D \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}(C')} \frac{|N_\Lambda(D)|}{|N_\Gamma(D)|} \chi\left(\varphi_{T,X,C'}\right). \tag{3.22}$$

D'après le lemme 3.3, on a on a

$$\frac{|N_\Lambda(D)|}{|N_\Gamma(D)|}\chi\left(\varphi_{T,X,C'}\right) = \chi\left(\varphi_{T,Z,D}\right) \tag{3.23}$$

d'où

$$n\,\chi\left(\varphi_{Y,X,C}\right) = \sum_{C'\in\mathcal{C}}\ \sum_{D\in\mathcal{D}\cap\mathcal{E}(C')} \chi\left(\varphi_{T,Z,D}\right) \tag{3.24}$$

$$= \sum_{D\in\mathcal{D}} \chi\left(\varphi_{T,Z,D}\right) \tag{3.25}$$

$$= \chi(\psi) \tag{3.26}$$

ce qui termine la preuve dans le cas où Z est irréductible.

On montre à présent la proposition en raisonnant par récurrence sur le nombre de composantes irréductibles de Z.

Écrivons $Z = \bigsqcup_{i\in I} Z_i$ où les Z_i sont des variétés affines normales et irréductibles. Soit ψ_i la formule définie par

$$\psi_i(z) = \psi(z) \wedge z \in Z_i. \tag{3.27}$$

Pour J partie non vide de I, on note φ_J la formule sur X définie par

$$\varphi_J(x) = \left(\bigwedge_{i\in J} \exists z,\ (\psi_i(z) \wedge f(z) = x)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i\notin J} \nexists z,\ (\psi_i(z) \wedge f(z) = x)\right). \tag{3.28}$$

Les φ_J forment une partition de φ. En utilisant cette partition, on se ramène au cas où on a, pour tout corps pseudo-fini K contenant k,

$$\forall i \in I, \quad f(\psi_i(K)) = \varphi(K). \tag{3.29}$$

En utilisant une stratification galoisienne de φ et en se restreignant à la strate ouverte, on se ramène au cas où φ est une formule galoisienne $\varphi_{Y,X,C}$.

Soit alors $i_0 \in I$. En reprenant le raisonnement précédent pour Z_{i_0}, on peut supposer $Z_{i_0} = Y/H$, où H est un sous-groupe de G contenant C, et que ψ_{i_0} est de la forme $\bigvee_{D\in\mathcal{D}} \varphi_{T,Y/H,D}$, où $T \to X$ est un revêtement galoisien dominant Y et $\mathcal{D}$ une famille de sous-groupe cycliques de $\mathrm{Gal}(T/Z_{i_0})$ deux à deux non conjugués dans $\mathrm{Gal}(T/Z_{i_0})$.

Soit $\mathcal{C}$ un système de représentants des classes de conjugaisons dans $\mathrm{Gal}(T/X)$ des sous-groupes cycliques de $\mathrm{Gal}(T/X)$ dont l'image dans G est conjuguée à C. Les formules $(\varphi_{T,X,C'})_{C'\in\mathcal{C}}$ forment une partition de $\varphi_{X,Y,C}$. On peut donc supposer que $Y = T$.

Soit

$$n_0 = |\mathcal{D}|\ \frac{|N_G(C)|}{|N_H(C)|}. \tag{3.30}$$

Alors pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'application

$$\psi_{i_0}(K) = \bigvee_{D\in\mathcal{D}} \varphi_{Y,Y/H,D}(K) \to \varphi_{Y,X,C}(K) \tag{3.31}$$

est n_0 pour 1.

Comme $\varphi_{Y,X,C}(K)$ est non vide pour au moins un K, on en déduit que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, l'application

$$\vee_{i\in I\setminus\{i_0\}} \psi_i(K) \to \varphi_{Y,X,C}(K) \tag{3.32}$$

induite par f est $(n-n_0)$ pour 1. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.

□

3.2.3 Conclusion

Nous démontrons à présent le théorème 2.3. On va d'abord montrer par récurrence sur d l'assertion suivante :

Assertion 3.9
Soient Z, X des variétés algébriques quasi-affines définies sur k, φ une formule sur X et ψ une formule sur Z. Soit $f : Z \to X$ un morphisme. On suppose que les hypothèse suivantes sont vérifiées :

1. $\dim(X) \leqslant d$
2. *Il existe un entier n tel que pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $f(\psi(K)) = \varphi(K)$ et l'application $\psi(K) \to \varphi(K)$ induite par f est n pour 1.*

Alors

$$\chi(\psi) = n\,\chi(\varphi) \tag{3.33}$$

Démonstration : Montrons que l'assertion 3.9 est vraie pour $d = 0$. On peut supposer que X est irréductible, c'est-à-dire est isomorphe au spectre d'une extension finie L de k. Par le corollaire 3.7, on peut supposer que $\dim(Z) = 0$. Alors Z s'écrit comme une union disjointe finie $\bigsqcup \mathrm{Spec}(L_i)$ où L_i est une extension finie de L. On applique alors le lemme 3.8.

Supposons l'assertion 3.9 vérifiée pour un d, et montrons qu'elle est vérifiée pour $d+1$. Soient X, Z, f, φ, ψ et n comme dans l'énoncé. On peut évidemment supposer que $\dim(X) = d+1$. Par ailleurs, il suffit de montrer que l'assertion 3.9 est vraie pour un ouvert affine non vide U de X assez petit (en remplaçant Z et Y par leurs images réciproques par U et ψ par sa restriction à l'image réciproque de U). On peut donc supposer que X est affine, normale, irréductible et que f est dominant.

En utilisant une stratification galoisienne de φ, on se ramène au cas où φ est une formule galoisienne $\varphi_{Y,X,C}$.

Grâce à la proposition 3.7, on peut supposer que $\dim(Z) = \dim(X)$.

On remplace alors X par un ouvert affine non vide du complémentaire de l'image schématique des composantes irréductibles de Z qui ne dominent pas X.

Quitte à rétrécir cet ouvert on peut supposer que Z est une union disjointe d'ouverts irréductibles $\bigsqcup Z_i$ de dimension $\dim(Z)$. Ainsi, pour tout i, $f_i : Z_i \to X$ est dominant et génériquement fini. Quitte à passer encore à un ouvert affine de X, on peut donc supposer que pour tout i $f_i : Z_i \to X$ est fini et Z_i est affine et normale. On applique alors le lemme 3.8. $\square$

Nous démontrons à présent le théorème 2.3 proprement dit. Soit φ une formule en p variables libres, et ψ une formule en q variables libres, telles que ψ est un n-revêtement de φ. Soit θ une formule en $p+q$ variables libres telle que, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $\theta(K) \subset K^p \times K^q$ est le graphe d'une application n pour 1 entre les éléments de $\psi(K)$ et ceux de $\pi(K)$. En particulier, θ et ψ sont logiquement équivalentes, on a donc $\chi(\theta) = \chi(\psi)$.

Soit f la projection $\mathbf{A}^{p+q} \to \mathbf{A}^p$. Par hypothèse, pour tout corps pseudo-fini K contenant k, $f(\theta(K)) = \varphi(K)$ et $\theta(K) \to \varphi(K)$ est n pour 1. L'assertion 3.9 montre alors que $\chi(\theta) = n\,\chi(\varphi)$, d'où le résultat.

Remerciements. Je remercie Johannes Nicaise pour d'utiles discussions sur le sujet et sa lecture détaillée et critique d'une première version erronée de cette note, ainsi qu'un rapporteur anonyme pour m'avoir signalé une erreur importante.

Références

[1] F. Bittner, The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero, Compos. Math., 140, (2004) 1011-1032.

[2] J. Denef, F. Loeser, Definable sets, motives and p-adic integrals, J. Am. Math. Soc., 14, no 2, (2002) 429-469.

[3] J. Denef, F. Loeser, Motivic integration and the Grothendieck group of pseudo-finite fields, in : Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 13-23.

[4] M. Fried, M. Jarden, Field arithmetic, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 11, Springer-Verlag, 1986.

[5] H. Gillet, C. Soulé, Descent, motives and K-theory, J. reine angew. Math., 478, (1996) 127-176.

[6] F. Guillén, V. Navarro Aznar, Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., 95, (2002) 1-91.

[7] T. Hales, What is motivic measure ? Bull. Amer. Math. Soc., 42, no. 2, (2005) 119-135.

[8] C. Kiefe, Sets definable over finite fields : their zeta-functions Trans. Amer. Math. Soc., 223, (1976) 45-59.

[9] J. I. Manin, Correspondences, motifs and monoidal transformations. Math. USSR-Sb., 6, (1968) 439-470.

[10] J. Nicaise, Relative motives and the theory of pseudo-finite fields, Prépublication math.AG/0403160 ;

[11] J. Nicaise, Relative motives and the theory of pseudo-finite fields, Int. Math. Res. Papers (2007)

[12] A.J. Scholl, Classical motives, in : Motives (Seattle, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 163-187