L3 MIPE **Année universitaire 2006-2007**

F02 : Intégration et séries de Fourier

Correction $n°1$

Exercice 1

- Montrons l'inégalité : $\forall x \in]0,1]$, $\frac{\tan(x)}{x} \leq \tan(1)$.
  La fonction $\tan(x)$ est convexe sur $[0,1]$ (et même sur $[0,\frac{\pi}{2}[$) : sa dérivée $1+\tan^2(x)$ est en effet croissante sur $[0,1]$. Donc pour tout $x \in [0,1]$, on a
  $$\tan(x*1+(1-x)*0) \leq x\tan(1)+(1-x)\tan(0),$$
  c'est à dire $\tan(x) \leq x\tan(1)$. On peut alors conclure.

- Notons f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f_n(x) = \frac{n}{x}\tan(\frac{1}{nx})$. Pour tout $x > 1$ et tout entier n, $\frac{1}{nx}$ appartient à $]0,1[$. La fonction f_n est donc bien définie et positive sur $]1,+\infty[$. Comme elle est de plus continue, elle est mesurable et l'intégrale I_n est bien définie. D'autre part, comme $\frac{1}{nx}$ appartient à $]0,1[$, on peut appliquer ce que l'on a démontré ci-dessus :
  $$f_n(x) = \frac{\tan(\frac{1}{nx})}{\frac{1}{nx}}\frac{1}{x^2} \leq \frac{\tan(1)}{x^2}.$$
  La fonction $\frac{\tan(1)}{x^2}$ étant intégrable sur $]1,+\infty[$, l'intégrale I_n est finie.

- Montrons que la suite I_n converge. Pour tout x on a
  $$\tan(\frac{1}{nx}) \sim_{n\infty} \frac{1}{nx}.$$
  On en déduit que pour tout $x \in]1,+\infty[$,
  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$
  De plus on a montré que pour tout x et tout n, $f_n(x) \leq \frac{\tan(1)}{x^2}$. Cette dernière fonction étant mesurable et intégrable sur $[1,+\infty[$, la condition de domination est vérifiée. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :
  $$\lim_n I_n = \int_1^{+\infty} \lim_n (f_n(x))dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$$
  La suite I_n converge donc vers 1.

Exercice 2

- Notons f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$. Cette fonction est continue donc mesurable et elle est positive sur $\mathbf{R}^2$. De plus l'ensemble D étant fermé, c'est un borélien. L'intégrale $I = \int_D f(x,y)dxdy$ est donc bien définie. Et f étant continue et D compact, on peut déjà affirmer que I est finie.
- L'ensemble D est le quart supérieur droit du disque de centre 0 et de rayon 1. Nous allons donc calculer I en utilisant le changement de variable en coordonnées polaires. Notons tout d'abord D' l'intérieur de D :
  $$D' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1\}.$$
  L'ensemble $D - D'$ est égal à $([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}_+ | x^2+y^2 = 1\}$. Ces trois ensembles sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. L'ensemble $D - D'$ est donc de mesure nulle, et on obtient que
  $$I = \int_{D'} f(x,y)dxdy.$$
  Notons ϕ l'application
  $$\begin{array}{cccc} \phi : & D' & \longrightarrow & \mathbf{R^2} \\ & (x,y) & \longmapsto & (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(\frac{y}{x})) \end{array}$$
  L'image de D' par ϕ est l'ensemble $E =]0,1[\times]0,\frac{\pi}{2}[$. On sait (d'après le cours) que ϕ est un C^1-difféomorphisme (cela n'aurait pas été vrai avec D) dont l'application inverse est donnée par

On peut calculer le jacobien de ϕ^{-1} :

$$|Jac(\phi^{-1})| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = |\rho|$$

Et nous pouvons désormais effectuer le changement de variable puis appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{D'} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} &= \int_E \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho d\theta = \int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \int_{]0,1[} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho d\theta \\ &= \int_{]0,\frac{\pi}{2}[} [\frac{\ln(1+\rho^2)}{2}]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Donc $I = \frac{\pi}{4}\ln(2)$.

Exercice 3

1. D'après le cours, la mesure image par ψ de la mesure $|Jac(\psi)|\lambda_U$ est la mesure λ_V.
2. Si f est une bijection mesurable de E sur F et que ν est la mesure image de μ par f, alors μ est la mesure image de ν par f^{-1}.
   Or l'application ψ^{-1} est un C^1-difféomorphisme de V dans U. D'après la question 1, la mesure image par ψ^{-1} de la mesure $|Jac(\psi^{-1})|\lambda_V$ est la mesure λ_U. On en déduit donc que la mesure image par ψ de la mesure λ_U est la mesure $|Jac(\psi^{-1})|\lambda_V$.
3. Nous allons appliquer le résultat de la question précédente.
   (a) La fonction f est clairement de classe C^1. De plus on peut voir en calculant sa dérivée et ses limites en l'infini qu'elle est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbf{R}$ tout entier. On en déduit que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
   On remarque de plus que la fonction f est égale à la fonction $2sh(x)$. On en déduit que son application réciproque est la fonction $f^{-1}(x) = argsh(\frac{x}{2})$. Le jacobien de cette fonction est donné par
   $$|Jac(f^{-1})| = |f^{-1\prime}(x)| = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{x}{2})^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$
   On peut donc conclure que la mesure image de λ par f est la mesure
   $$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\lambda.$$
   (b) Il faut ici distinguer les cas n pair, n impair et $n=0$.
   Si n est pair, considérons les fonctions f_1 et f_2 qui sont les restrictions de f à $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$. La fonction f_1 est une bijection croissante de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même. De plus sa dérivée est strictement positive. C'est donc un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$. L'application réciproque de f_1 est donnée par
   $$f_1^{-1}(x) = \sqrt[n]{x},$$
   et son jacobien est
   $$|Jac(f^{-1})| = |f^{-1\prime}(x)| = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} > 0.$$
   De même, f_2 est une bijection décroissante de $\mathbf{R}_-^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$, dont la dérivée est strictement positive. C'est donc un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}_-^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$, dont l'application réciproque est $f^{-1}(x) = -\sqrt[n]{x}$ et le jacobien est $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.
   Enfin, on rappelle que l'ensemble $\{0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi, si on se donne une fonction mesurable positive g, on a alors
   $$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} g(f(x))d\lambda(x) &= \int_{\mathbf{R}_+^*} g(f_1(x))d\lambda(x) + \int_{\mathbf{R}_-^*} g(f_2(x))d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbf{R}_+^*} g(y)\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}d\lambda(y) + \int_{\mathbf{R}_+^*} g(y)\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbf{R}} g(y)\frac{2}{n}y^{\frac{1}{n}-1}\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}d\lambda(y)\end{aligned}$$
   On en déduit que la mesure image de λ par f est la mesure

Si n est impair, on effectue un raisonnement analogue (cette fois, f induit un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^*$ dans lui-même) et on obtient que la mesure image de λ par f est la mesure

$$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\lambda.$$

Si $n = 0$, la fonction f est alors la fonction constante égale à 1. Notons ν la mesure image de λ par f. Soit B un borélien de $\mathbf{R}$. Par définition, on a $\nu(B) = \lambda(f^{-1}(B))$. Or $f^{-1}(B)$ est égal à $\mathbf{R}$ si $1 \in B$, et est vide sinon. Donc $\nu(B) = +\infty$ si $1 \in B$ et $\nu(B) = 0$ sinon. La mesure ν est la mesure portée par l'ensemble $\{1\}$ avec $\nu(\{1\}) = +\infty$.

4. L'application f est clairement de classe C^1. Elle est obtenue comme composition du changement de variable polaire $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ avec le changement de variable $(r, \theta) \mapsto (exp(r), \theta)$. On peut ainsi montrer que pour tout entier k, c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}\times]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ dans $\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}_+ \times \{0\}$, dont l'application réciproque est

$$f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}_+ \times \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{R}\times]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ (u,v) & \longmapsto & (\ln(\sqrt{u^2+v^2}), \arctan(\frac{v}{u}) + 2k\pi) \end{array}.$$

On calcule le jacobien de f :

$$|Jac(f)(x,y)| = \begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

On en déduit le jacobien de f^{-1} :

$$|Jac(f^{-1})(u,v)| = \frac{1}{|Jac(f)(f^{-1}(u,v))|} = \frac{1}{|Jac(f)(\ln(\sqrt{u^2+v^2}), \arctan(\frac{v}{u}) + 2k\pi)|} = e^{-2\ln(\sqrt{u^2+v^2})} = \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Ainsi, pour toute fonction mesurable positive g, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^2} g(f(x,y))d\lambda_2(x,y) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}\times]2k\pi,2(k+1)\pi[} g(f(x,y))d\lambda_2(x,y) \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^2-\mathbf{R}_+\times\{0\}} g(u,v)\frac{1}{u^2+v^2}d\lambda_2(u,v) \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} g(u,v)(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{u^2+v^2})d\lambda_2(u,v). \end{aligned}$$

Il apparaît donc que la mesure image de λ_2 par f est la mesure $(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{u^2+v^2})\lambda_2$. Mais comme la fonction $(u,v) \mapsto \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{u^2+v^2}$ vaut toujours $+\infty$, cette mesure est simplement la mesure qui vaut $+\infty$ sur tous les boréliens de $\mathbf{R}^2$ de mesure non nulle, et 0 sur les autres.

Exercice 4

1. Considérons la fonction $g(x) = |f(x)|^{p(x)}$. Cette fonction est égale à $\exp(p(x)\ln(|f(x)|))$ sur l'ensemble mesurable $\{f \neq 0\}$. La fonction f étant mesurable, la fonction $|f|$ est mesurable, et $\ln|f|$ l'est aussi. Le produit de fonctions mesurables $p(x)ln|f(x)|$ est également mesurable, et on peut conclure que g est mesurable. Enfin g étant positive, l'intégrale $\Theta_{p(.)}(f)$ est bien définie.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^{p(.)}(X)$. Si $|\lambda| \leq 1$, alors comme $p(x) \geq 1$, on a $|\lambda|^{p(x)} \leq |\lambda|$ pour tout x. Ainsi

$$\int_X |\lambda f(x)|^{p(x)}d\mu(x) \leq |\lambda|\Theta_{p(.)}(f) < +\infty.$$

Si $|\lambda| > 1$, alors comme $p(x) \leq M$, on a $|\lambda|^{p(x)} \leq |\lambda|^M$ pour tout x. Ainsi

$$\int_X |\lambda f(x)|^{p(x)}d\mu(x) \leq |\lambda|^M\Theta_{p(.)}(f) < +\infty.$$

On a donc montré que pour tout réel λ, la fonction λf est dans $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$.

3. – Montrons que la fonction $\theta_f(\lambda)$ est continue. Posons $g(\lambda, x) = |\lambda f(x)|^{p(x)}$. Pour tout λ, la fonction $x \mapsto g(\lambda, x)$ est intégrable. Pour tout x, la fonction $\lambda \mapsto g(\lambda, x)$ est continue. Enfin on a vu que pour tout x, $g(\lambda, x) \leq \max(|\lambda|, |\lambda|^M)|f(x)|^{p(x)} \leq \max(|A|, |A|^M)|f(x)|^{p(x)}$ pour $\lambda \in [-A, A]$, $A > 0$. Cette dernière fonction étant intégrable, on peut déduire du critère de continuité d'une intégrale à paramètre que la fonction θ_f est continue sur $[-A, A]$. Ceci étant vrai pour tout réel A, la fonction

– Montrons que θ_f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Soit $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$.

$$\theta_f(\lambda_2) - \theta_f(\lambda_2) = \int_X |\lambda_2 f(x)|^{p(x)} d\mu(x) - \int_X |\lambda_1 f(x)|^{p(x)} d\mu(x) = \int_X (\lambda_2^{p(x)} - \lambda_1^{p(x)}) |f(x)|^{p(x)} d\mu(x)$$

Comme $\lambda_2 - \lambda_1$ est positif, cette intégrale est positive, et comme on a supposé de plus que f n'était pas nulle presque partout, cette intégrale n'est pas nulle. Donc $\theta_f(\lambda_2) > \theta_f(\lambda_2)$ et θ_f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

– Pour tout entier $\lambda > 1$, on a $\lambda^{p(x)} \geq \lambda$. On en déduit que pour tout $\lambda > 1$

$$\theta_f(\lambda) = \int_X |\lambda f(x)|^{p(x)} d\mu(x) \geq \lambda \Theta_{p(.)}(f).$$

Comme f n'est pas nulle presque partout, $\Theta_{p(.)}(f)$ est non nulle et $\theta_f(\lambda)$ diverge vers $+\infty$ quand λ tend vers $+\infty$.

– Enfin, on remarque que $\theta_f(0) = 0$. On peut alors conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\lambda_f > 0$ tel que $\theta_f(\lambda_f) = 1$.

4. Lorsque $p(x)$ est la fonction constante égale à p, on retrouve la norme $||.||_p$ usuelle. En effet l'ensemble des fonctions f telles que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$ est par définition l'espace $\mathcal{L}^p(X)$. Et pour une telle fonction f non nulle presque partout, on a

$$\theta_f(\lambda) = \int_X |\lambda f(x)|^p d\mu(x) = |\lambda|^p ||f||_p^p.$$

Ainsi $\theta_f(\lambda) = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{||f||_p}$. Donc $\frac{1}{\lambda_f} = ||f||_p$, *i.e.* $||f||_{p(.)} = ||f||_p$.

5. – La première inégalité est une conséquence immédiate de la convexité de la fonction $x \mapsto x^r$ pour $r \geq 1$.

– Soit $t \in [0,1]$ et $\phi, \psi \in \mathcal{L}^{p(.)}(X)$.

$$\int_X |t\phi(x) + (1-t)\psi(x)|^{p(x)} d\mu(x) \leq \int_X (t|\phi(x)| + (1-t)|\psi(x)|)^{p(x)} d\mu(x) \leq \int_X t|\phi(x)|^{p(x)} + (1-t)|\psi(x)|^{p(x)} d\mu(x)$$

On en déduit que

$$\Theta_{p(.)}(t\phi + (1 - t\psi)) \leq t\Theta_{p(.)}(\phi) + (1-t)\Theta_{p(.)}(\psi).$$

En particulier comme ϕ et ψ sont dans $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$, cela signifie que $\Theta_{p(.)}(t\phi + (1 - t\psi)) < +\infty$, et $t\phi + (1-t)\psi$ est dans $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$.

– Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient que $\frac{1}{2}(\phi + \psi)$ est dans $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$. Grâce à la question 2, on déduit avec $\lambda = 2$ que $\phi + \psi \in \mathcal{L}^{p(.)}(X)$. Avec le résultat de la question 2, cela permet de conclure que $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables.

– Montrons désormais la dernière inégalité. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$ non nulles presque partout (si elles le sont, alors $f + g$ l'est également et le résultat est évident). Considérons les réels λ_f et λ_g associés à f et g (cf question 3). Les fonctions $\lambda_f f$ et $\lambda_g g$ sont dans $\mathcal{L}^{p(.)}(X)$. On peut alors appliquer l'inégalité obtenue ci-dessus avec $t = \frac{\lambda_g}{\lambda_f + \lambda_g}$ et $1 - t = \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}$:

$$\Theta_{p(.)}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_f + \lambda_g}(\lambda_f f) + \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}(\lambda_g g)\right) \leq \frac{\lambda_g}{\lambda_f + \lambda_g}\Theta_{p(.)}(\lambda_f f) + \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}\Theta_{p(.)}(\lambda_g g).$$

Or, par définition de λ_f et λ_g, on a $\Theta_{p(.)}(\lambda_f f) = \Theta_{p(.)}(\lambda_g g) = 1$. Donc

$$\Theta_{p(.)}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_f + \lambda_g}(\lambda_f f) + \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}(\lambda_g g)\right) \leq \frac{\lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g} + \frac{\lambda_g}{\lambda_f + \lambda_g},$$

c'est à dire

$$\Theta_{p(.)}\left(\frac{\lambda_g \lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}(f + g)\right) \leq 1.$$

Donc $\theta_{f+g}(\frac{\lambda_g \lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}) \leq 1$. Comme θ_{f+g} est croissante et $\theta_{f+g}(\lambda_{f+g}) = 1$, on peut déduire que

$$\lambda_{f+g} \geq \frac{\lambda_g \lambda_f}{\lambda_f + \lambda_g}.$$

Et en passant à l'inverse, on obtient

$$\begin{aligned} ||f+g||_{p(.)} &\leq \frac{\lambda_f + \lambda_g}{\lambda_g \lambda_f} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_f} + \frac{1}{\lambda_g}, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$||f+g||_{p(.)} \leq ||f||_{p(.)} + ||g||_{p(.)}.$$